

Математика

Решаем с Татьяной Борисовной

легко



**МАТЕМАТИКА
ЛЕГКО!**



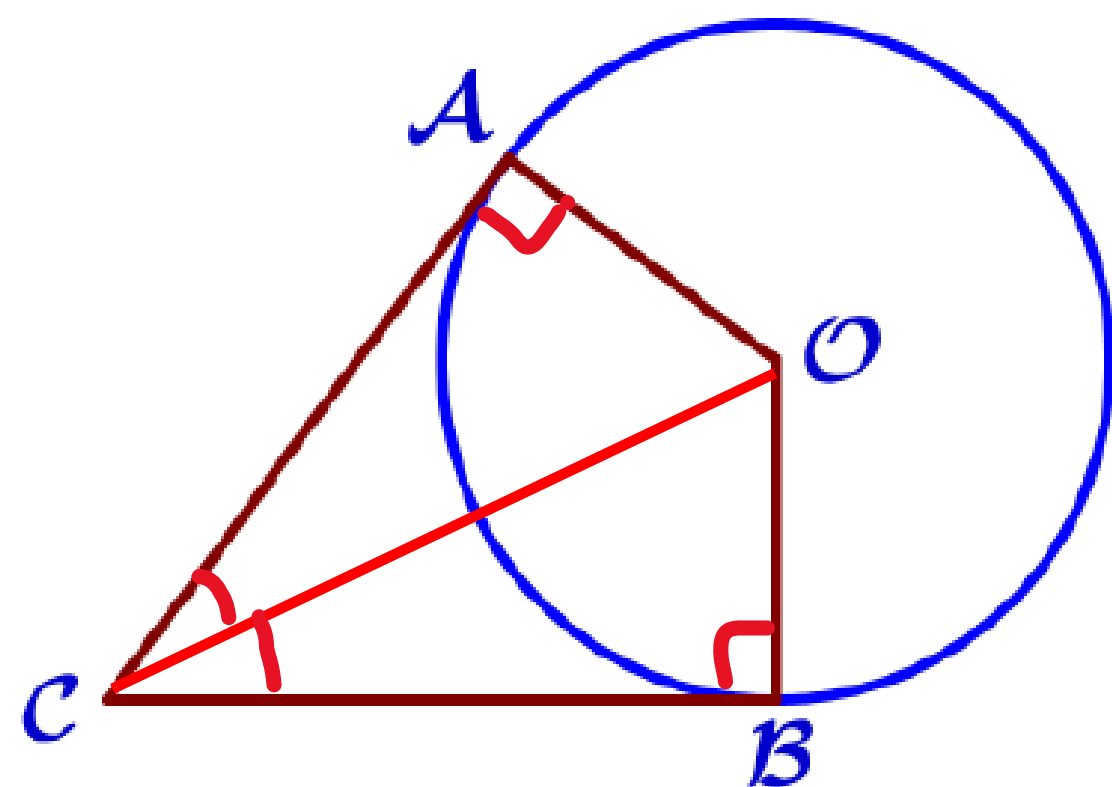
mathslegko.ru

ОГЭ 2024

Задание № 16

Окружность

I) Касательная к окружности



1. В угол C величиной 79° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B , точка O – центр окружности. Найдите угол AOB . Ответ дайте в градусах.

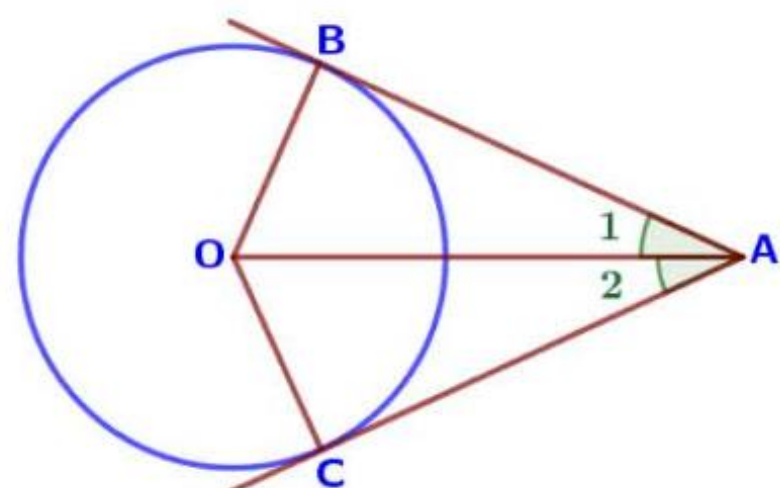
$$\angle OCB = 79^\circ : 2 = 39,5^\circ$$

$$\angle BOC = 90^\circ - 39,5^\circ = 50,5^\circ$$

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle BOC = 2 \cdot 50,5^\circ = 101^\circ$$



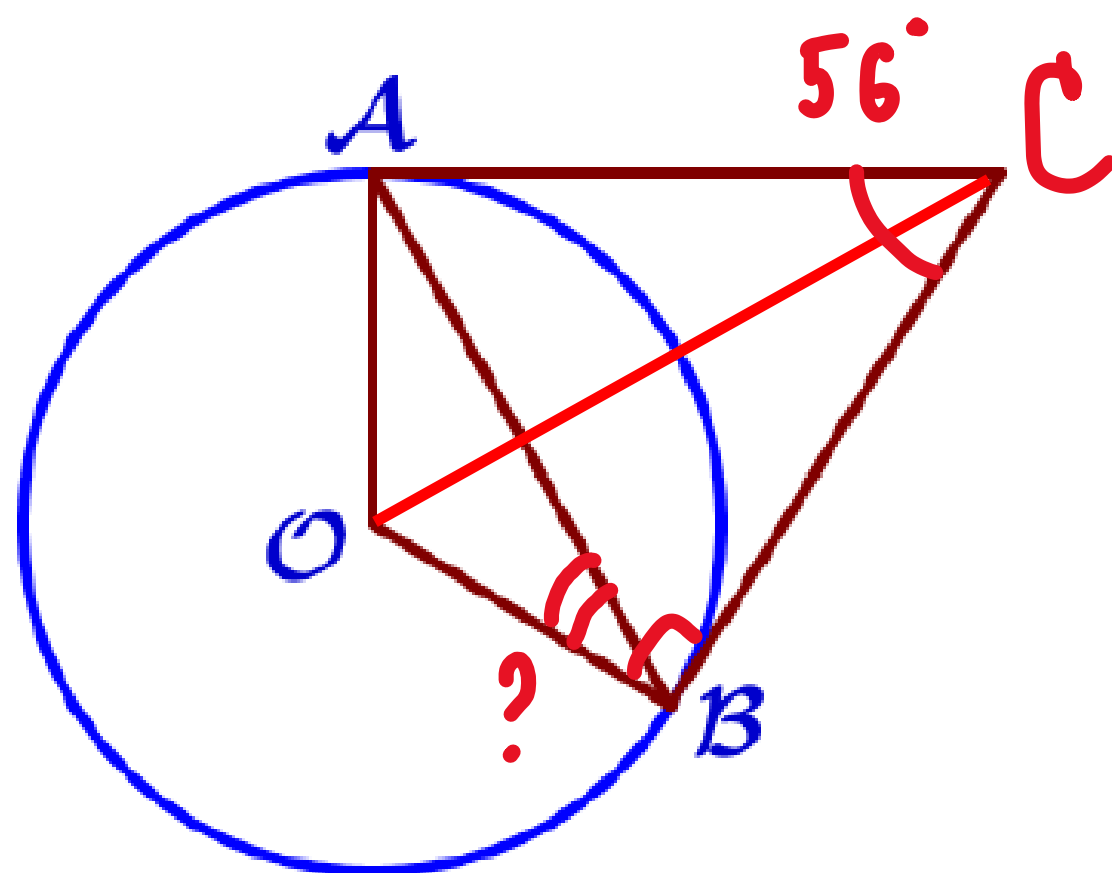
Касательная к окружности **перпендикулярна** к радиусу, проведенному в точку касания.



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, **равны** и составляют **равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности:

$$AB = AC, \quad \angle 1 = \angle 2.$$

Задание 16. Окружность



2. Касательные в точках A и B к окружности с центром O пересекаются под углом 56° . Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.

$$\angle ACO = \angle OCB = 56^\circ : 2 = 28^\circ$$

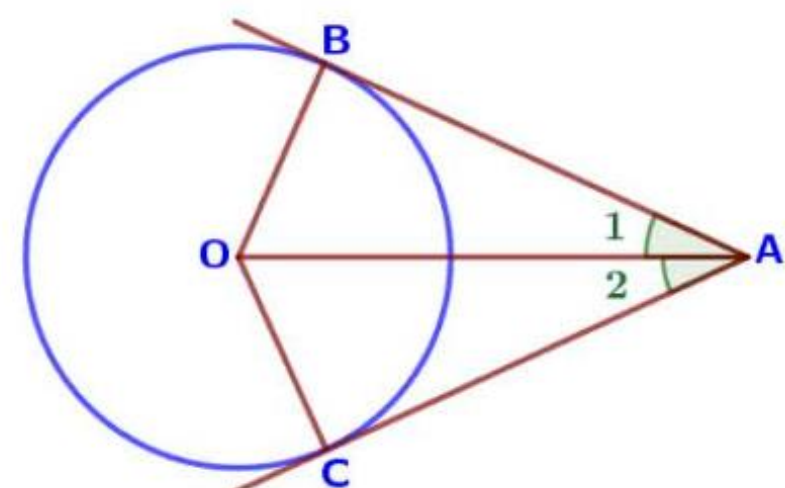
$$\angle COB = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

$$\triangle AOB : \angle AOB = 2 \cdot 62^\circ = 124^\circ$$

$$\angle OBA = \angle OAB = (180^\circ - 124^\circ) : 2 = 28^\circ$$



Касательная к окружности **перпендикулярна** к радиусу, проведенному в точку касания.

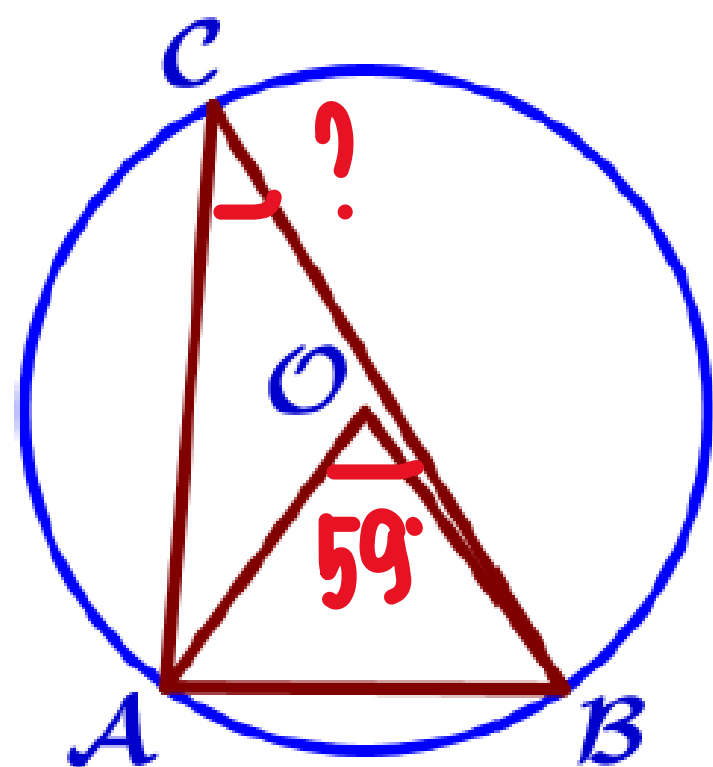


Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, **равны** и составляют **равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности:

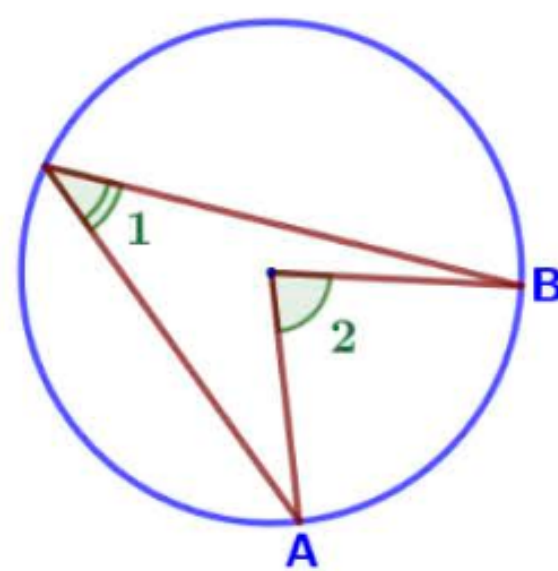
$$AB = AC, \quad \angle 1 = \angle 2.$$

II) Центральные и вписанные углы

3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен 59° . Ответ дайте в градусах.



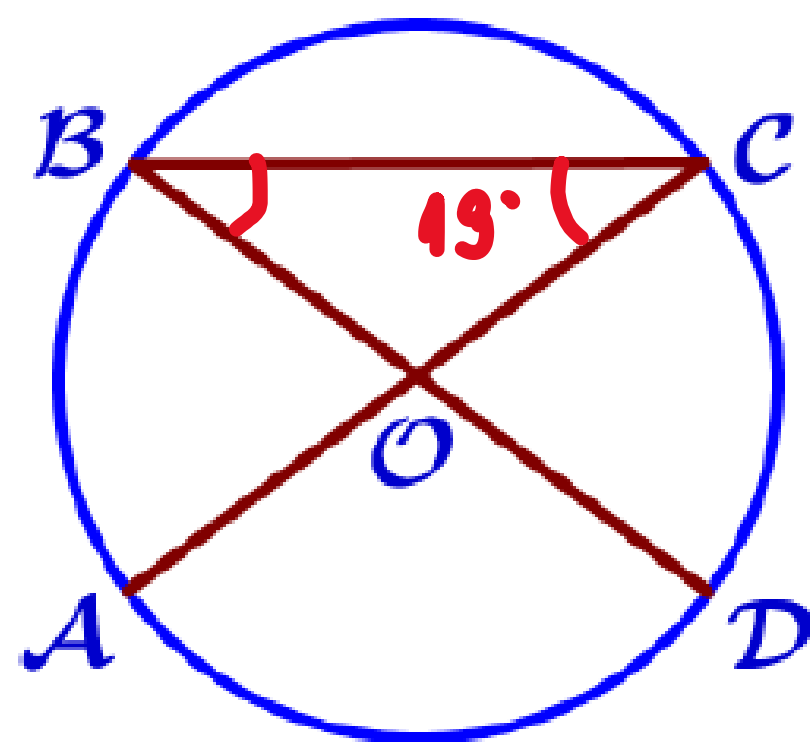
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 59^\circ = 29,5^\circ$$



Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.

Задание 16. Окружность



4. Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 19° . Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

$$\angle ACB = \angle CBA = 19^\circ$$

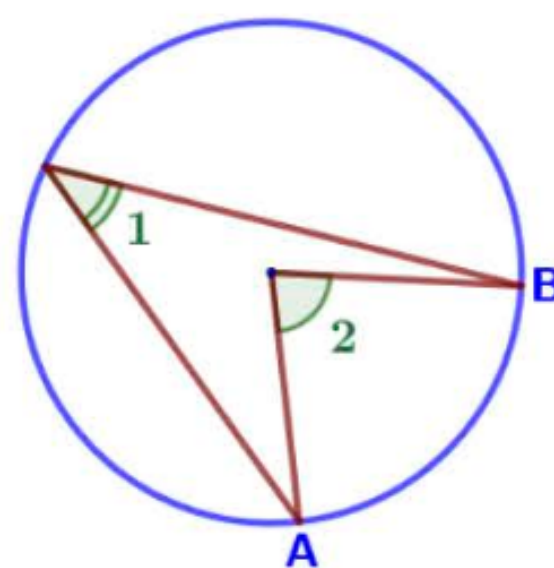
$$\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot 19^\circ = 142^\circ$$

$$\angle BOC = \angle AOD = 142^\circ \text{ (вертикал.)}$$



Вертикальные углы равны:

$$\angle 3 = \angle 4.$$

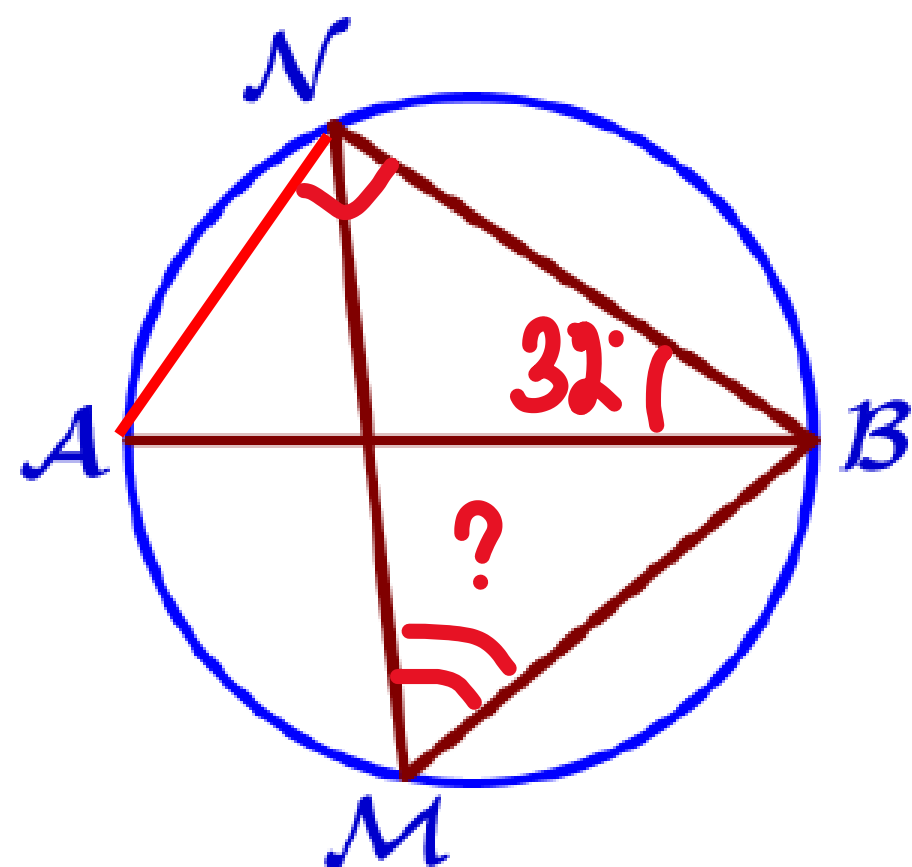


Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

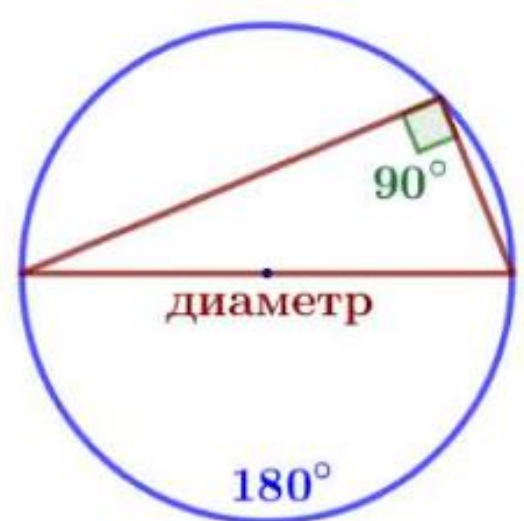
Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.

Задание 16. Окружность

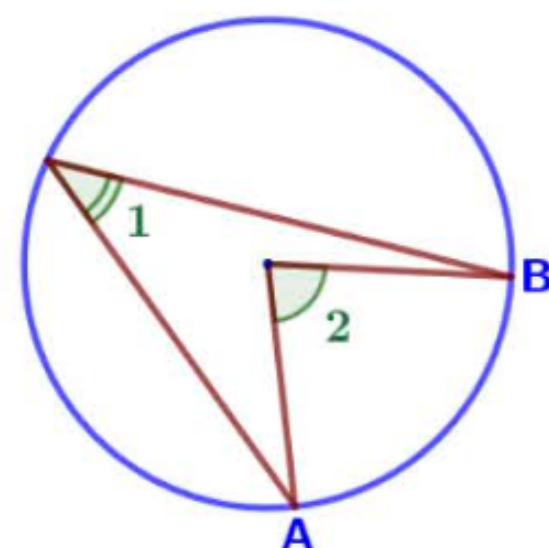
5. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 32^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.



$$\begin{aligned}\angle ANB &= 90^\circ \\ \angle NAB &= 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ \\ \angle NAB &= \angle NMB = 58^\circ \text{ (вписанные)}\end{aligned}$$



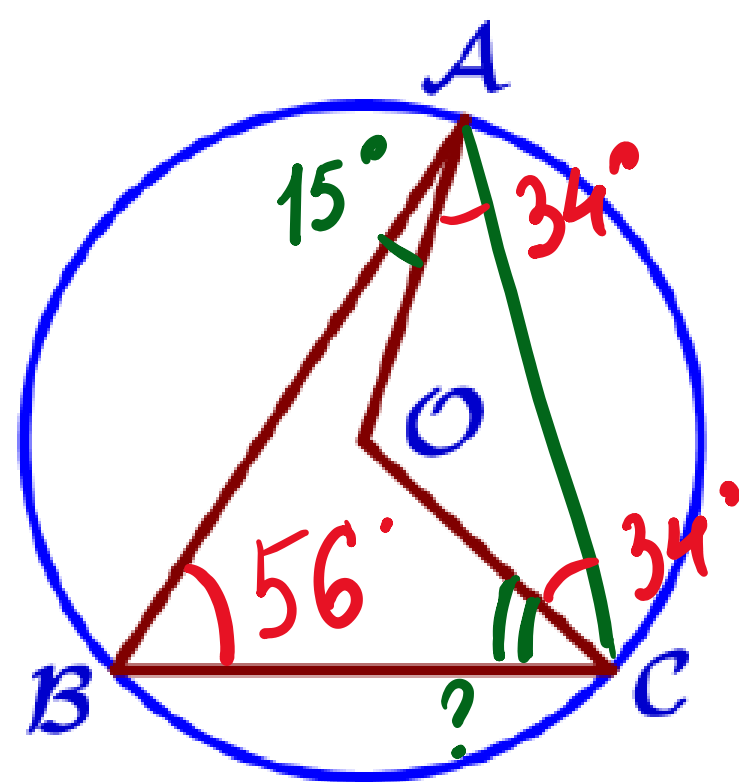
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – **прямой** (90°).



Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.

Задание 16. Окружность



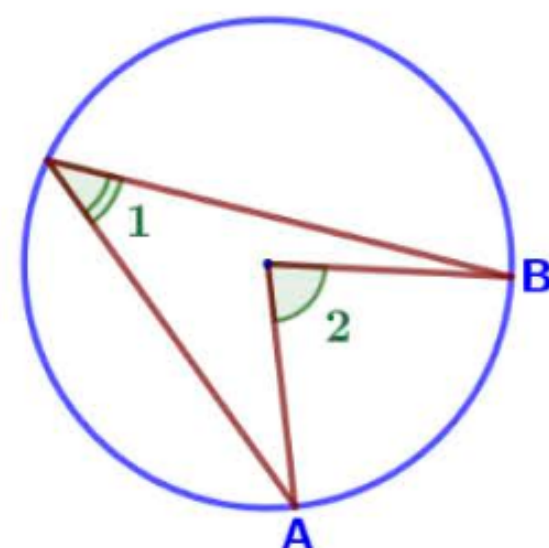
6. Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A , B и C . Известно, что $\angle ABC = 56^\circ$ и $\angle OAB = 15^\circ$. Найдите $\angle BCO$. Ответ дайте в градусах.

$$\angle ABC = 56^\circ \Rightarrow \angle AOC = 2 \cdot 56 = 112^\circ$$

$$\triangle AOC - \text{р/б} \Rightarrow \angle OAC = \angle OBC = (180^\circ - 112^\circ) : 2 = 34^\circ$$

$$\triangle ABC: \begin{cases} \angle A = 15^\circ + 34^\circ = 49^\circ \\ \angle B = 56^\circ \\ \angle C = 180^\circ - 49^\circ - 56^\circ = 75^\circ \end{cases}$$

$$\angle OCB = 75^\circ - 34^\circ = 41^\circ$$

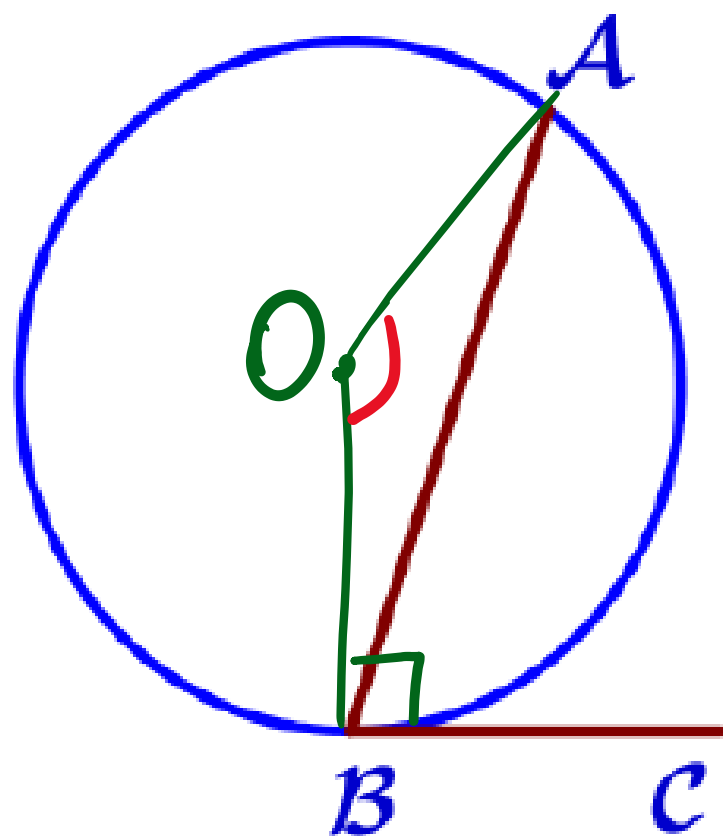


Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.

Задание 16. Окружность

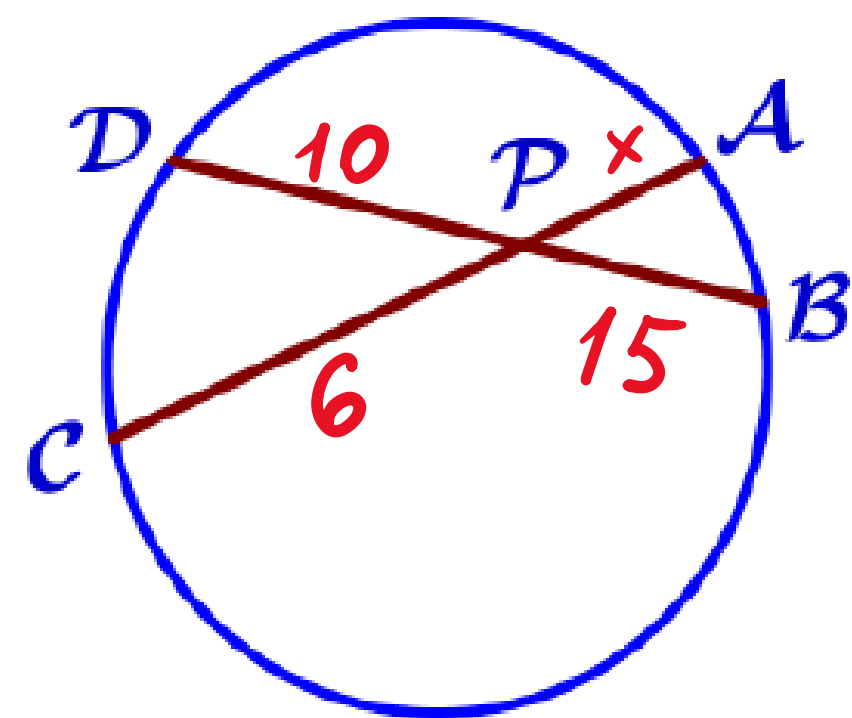
7. На окружности отмечены точки А и В так, что меньшая дуга АВ равна 152° . Прямая ВС касается окружности в точке В так, что угол АВС острый. Найдите угол АВС. Ответ дайте в градусах.



$$\begin{aligned} OA = OB = R &\Rightarrow \triangle AOB - \text{р/б} \\ \angle OAB = \angle OBA &= 152^\circ \\ \angle OBA = \angle OAB &= (180^\circ - 152^\circ) : 2 = 14^\circ \\ OB \perp BC &\Rightarrow \angle OBC = 90^\circ \\ \angle ABC &= \angle OBC - \angle OBA = 90^\circ - 14^\circ = 76^\circ \end{aligned}$$



Касательная к окружности **перпендикулярна** к радиусу, проведенному в точку касания.

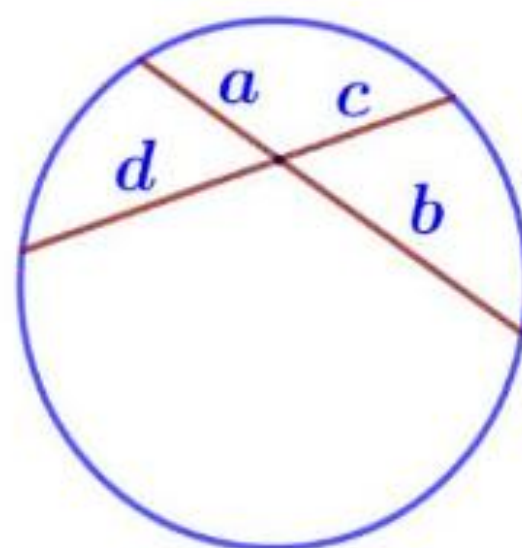


8. Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. $BP=15$. $CP=6$. $DP=10$. Найдите AP.

$$CP \cdot AP = DP \cdot PB$$

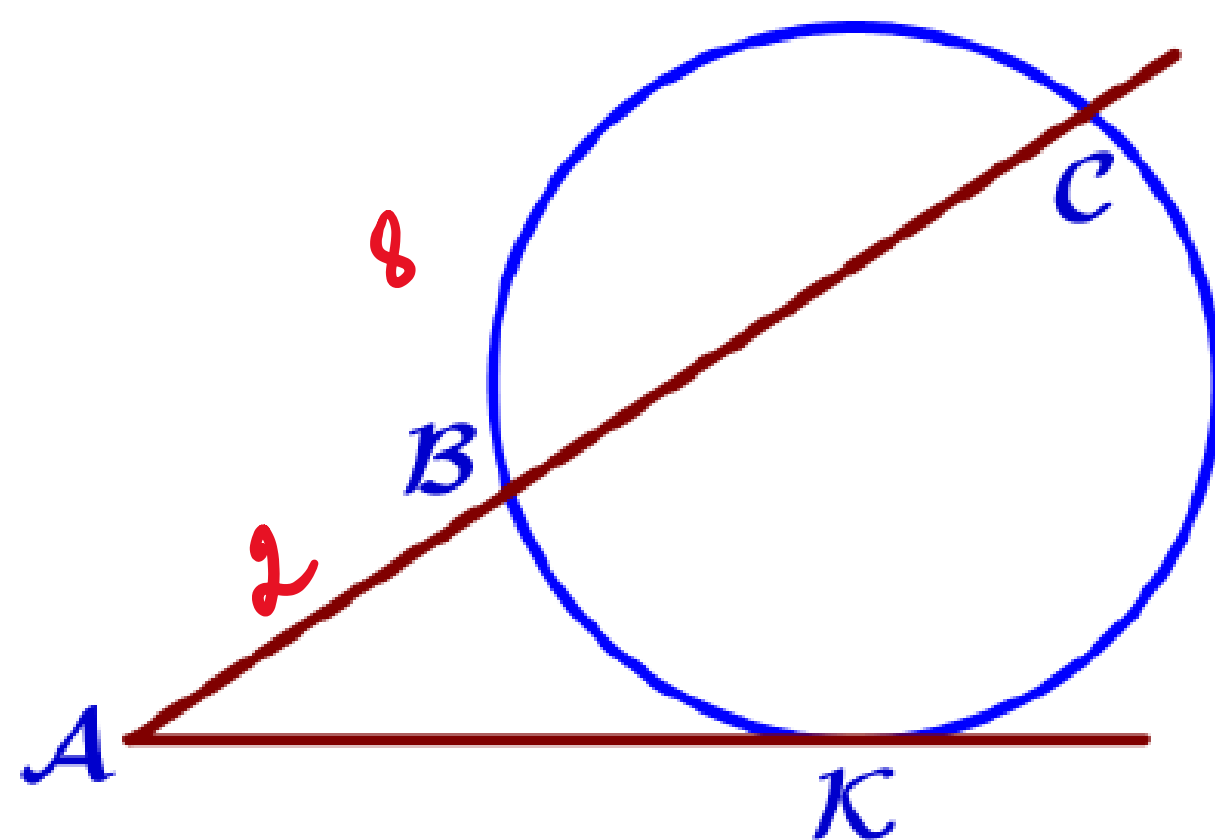
$$6 \cdot x = 10 \cdot 15$$

$$x = \frac{10 \cdot 15}{6} = 25$$



Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $ab=cd$.

Задание 16. Окружность

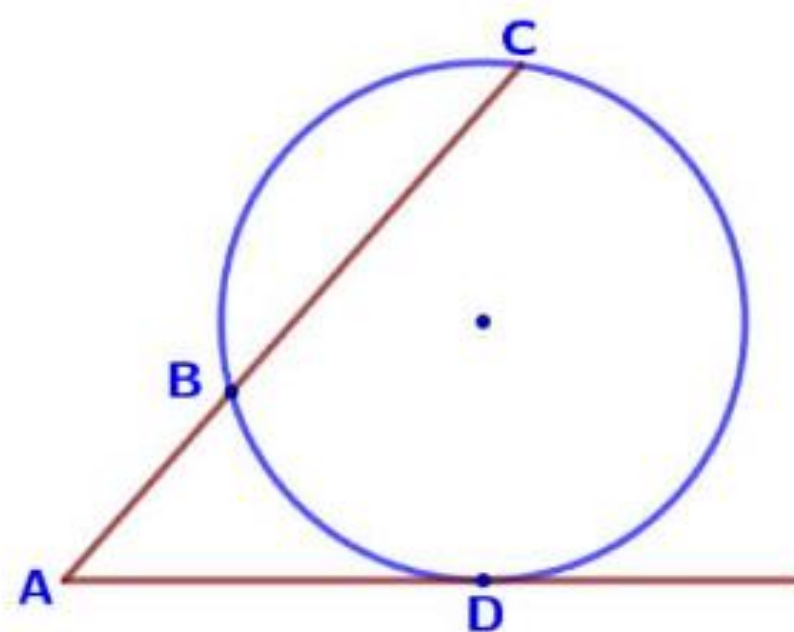


9. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём $AB = 2$, $AC = 8$. Найдите AK.

$$AK^2 = AB \cdot AC$$

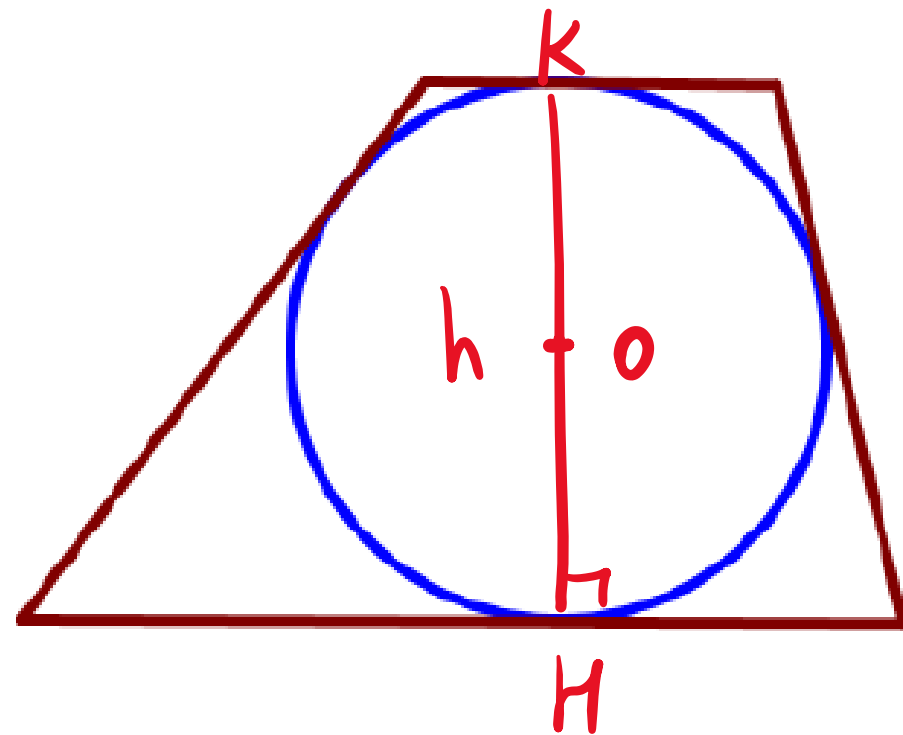
$$AK^2 = 2 \cdot 8 = 16$$

$$AK = 4$$



Квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

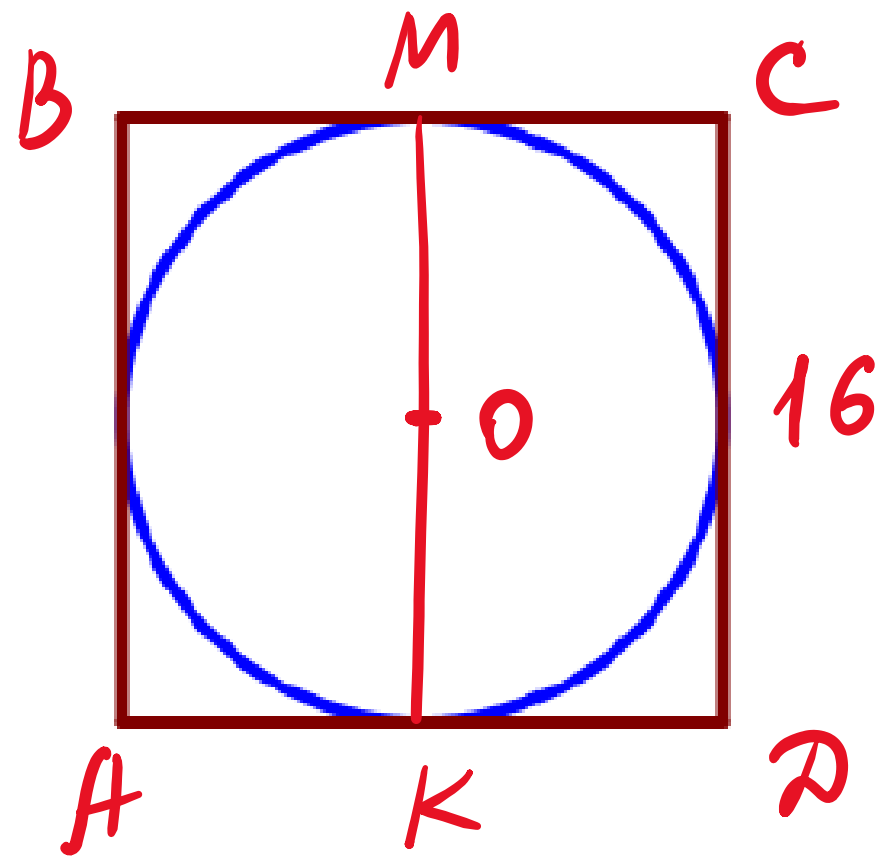
$$AD^2 = AB \cdot AC.$$

III) Вписанная окружность

10. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 18. Найдите высоту этой трапеции.

$$OK = OH = 18$$

$$h = OK + OH = 18 + 18 = 36$$

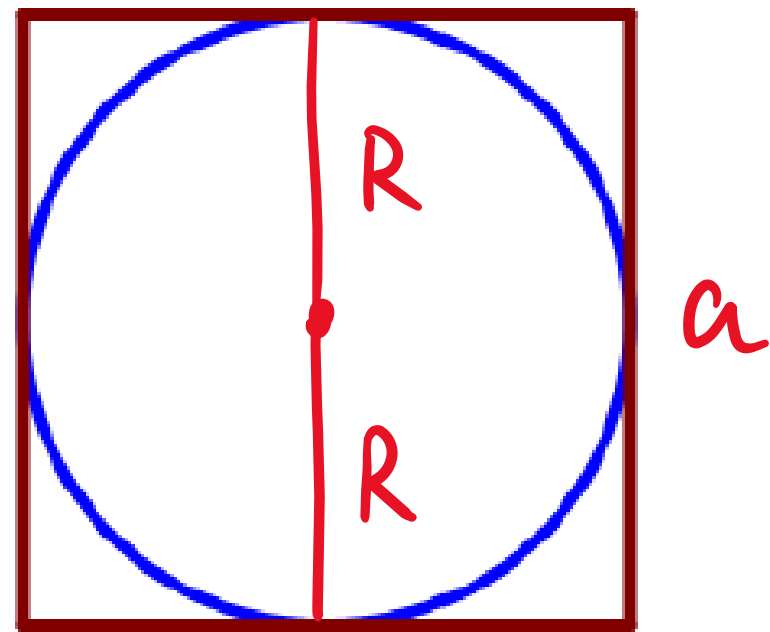


11. Сторона квадрата равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

$$AB = MK = 16$$

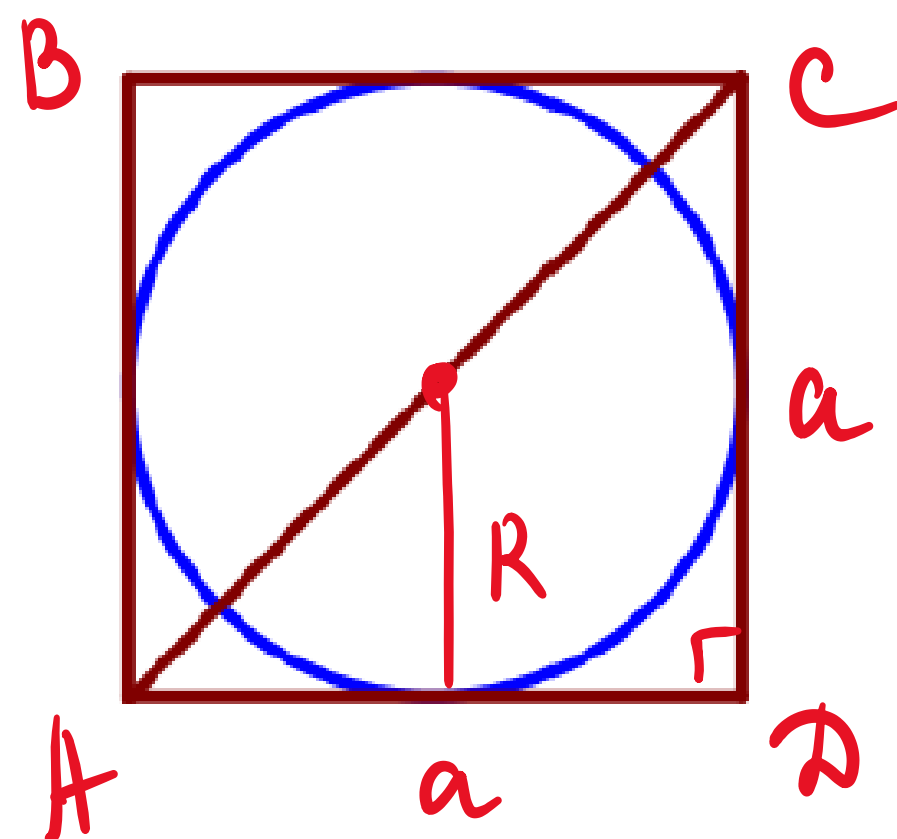
$$MO = OK = R$$

$$R = 16 : 2 = 8$$



12. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 40.

$$a = 2R = 2 \cdot 40 = 80$$
$$S = a^2 = 80^2 = 6400$$



13. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $6\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.

$$a = 2R = 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$\triangle ADC$ — прямоугольный по т. Пифагора:

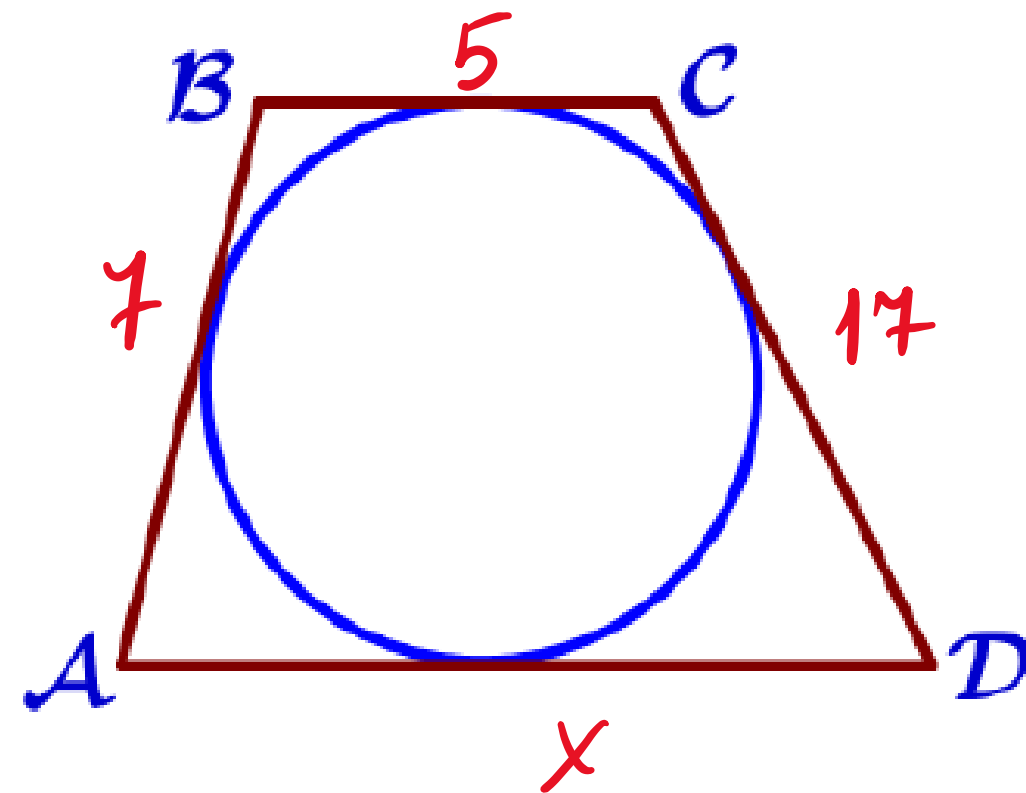
$$AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$(12\sqrt{2})^2 + (12\sqrt{2})^2 = d^2$$

$$12^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 2 = d^2$$

$$12^2 \cdot 4 = d^2$$

$$d = \sqrt{12^2 \cdot 2^2} = 12 \cdot 2 = 24$$



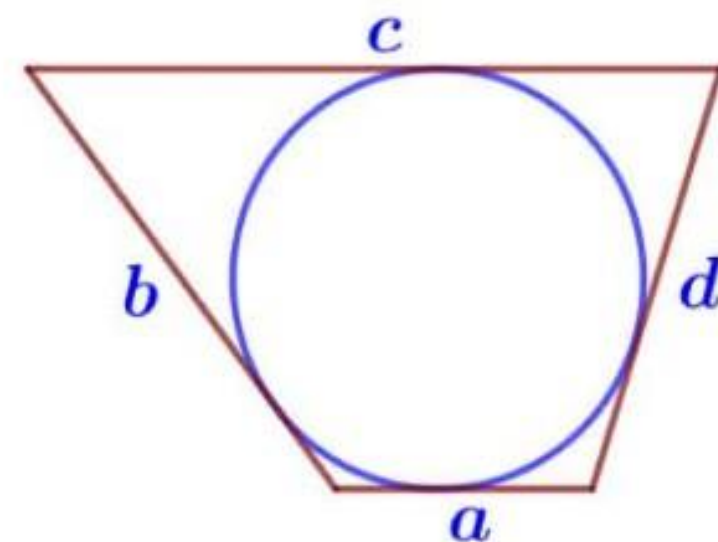
14. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, $AB=7$, $BC=5$, $CD=17$. Найдите AD.

$$BC + AD = AB + CD$$

$$5 + x = 7 + 17$$

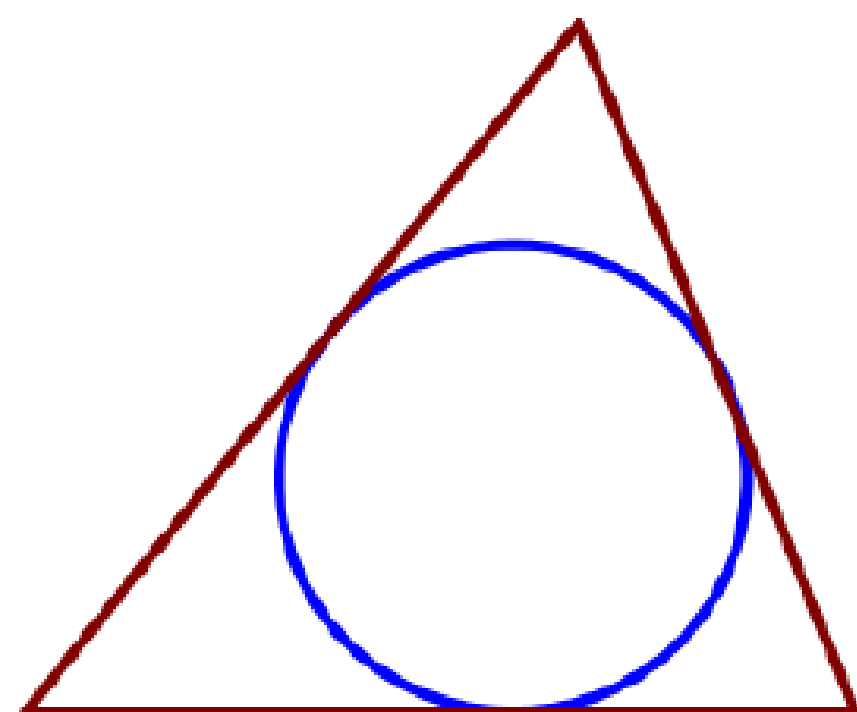
$$x = 24 - 5$$

$$x = 19$$



В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны:

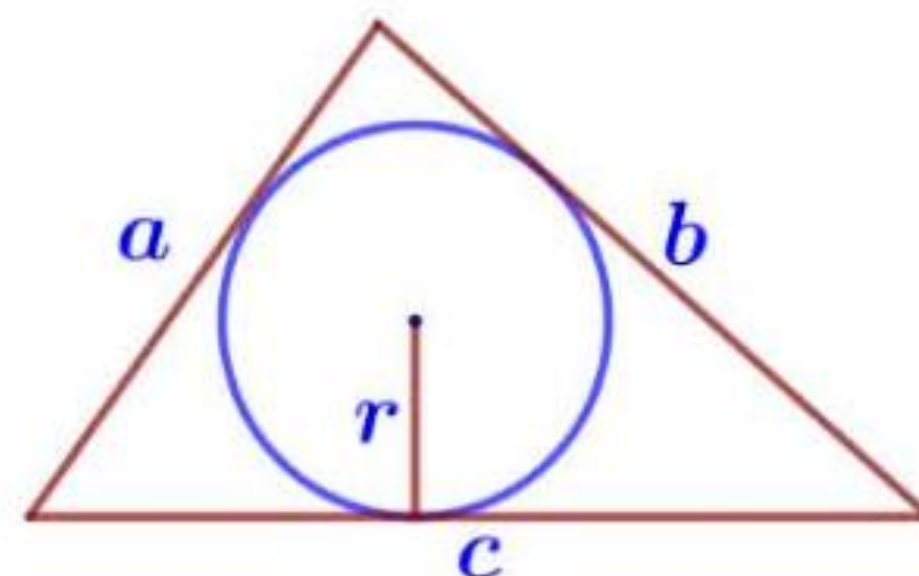
$$a + c = b + d.$$



15. Периметр треугольника равен 48, одна из сторон равна 18, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.

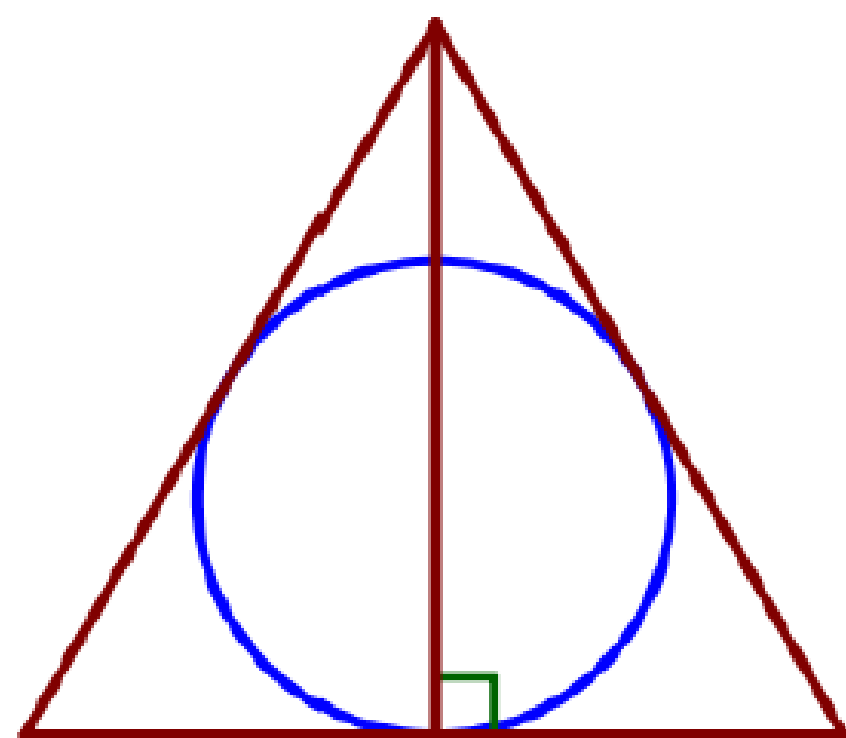
$$P = 48, \quad r = 3$$

$$S = \frac{1}{2} Pr = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$$



$$S = \frac{1}{2} Pr \quad P = a + b + c$$

Задание 16. Окружность



16. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 7. Найдите высоту этого треугольника.

$$r = 7$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{7}{1} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$a\sqrt{3} = 42$$

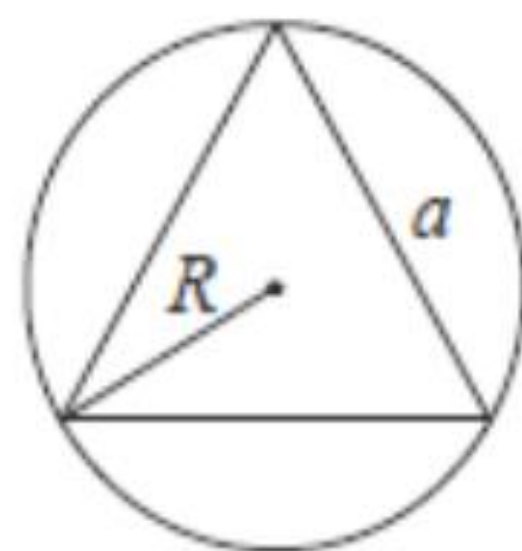
$$a = \frac{42}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\cancel{42}\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \cancel{2}} = 21$$

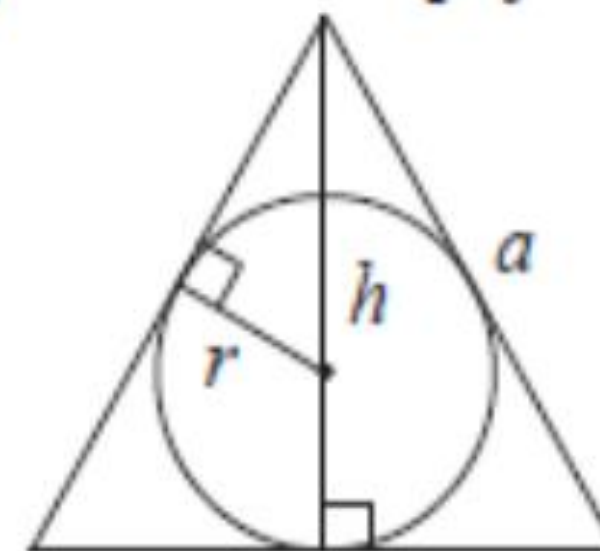
$$h = 21$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



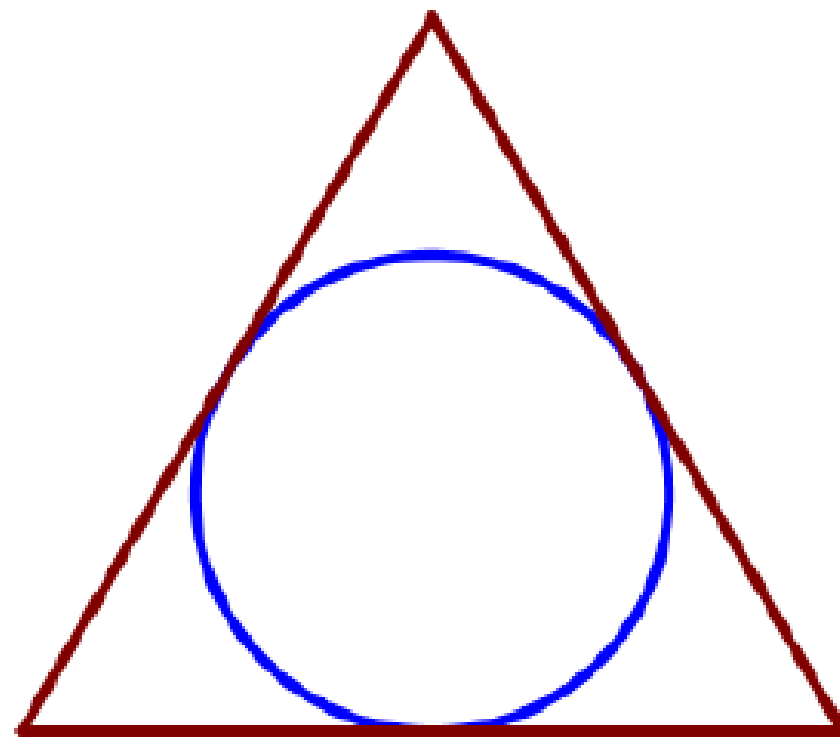
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

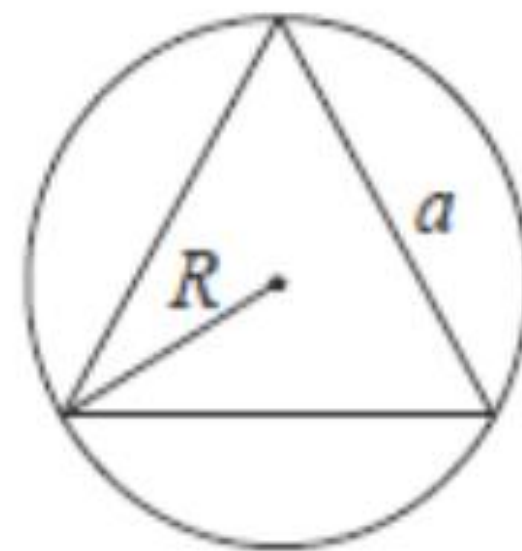


17. Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

$$a = 6\sqrt{3}$$

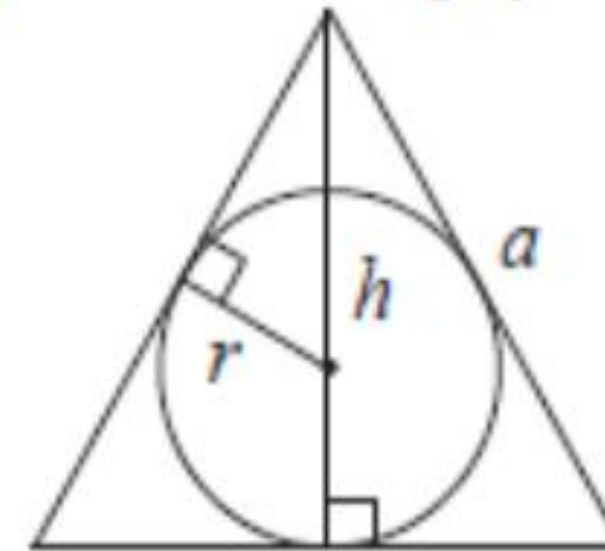
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



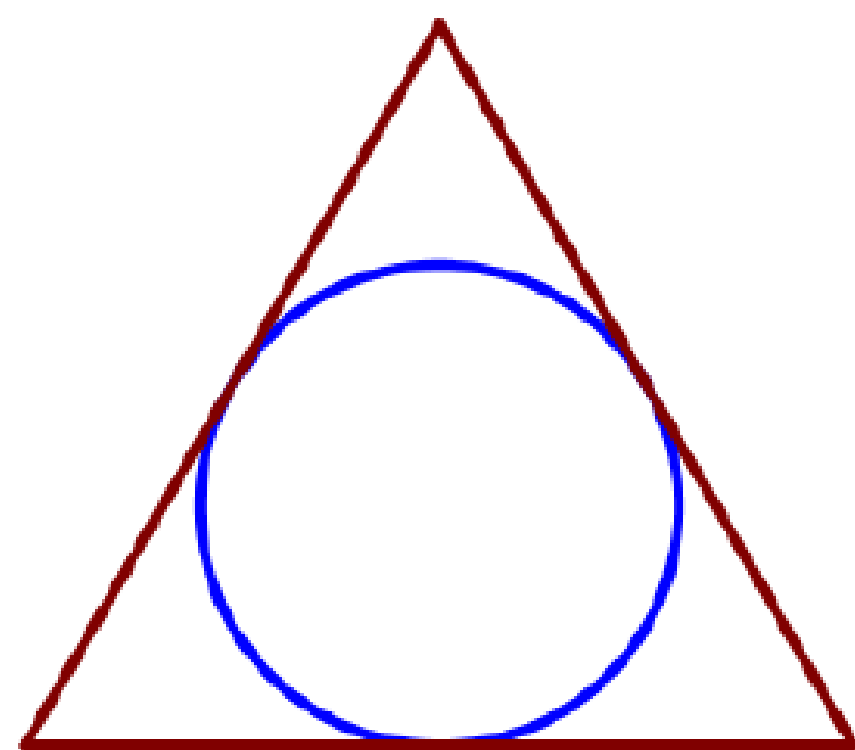
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



18. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $5\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

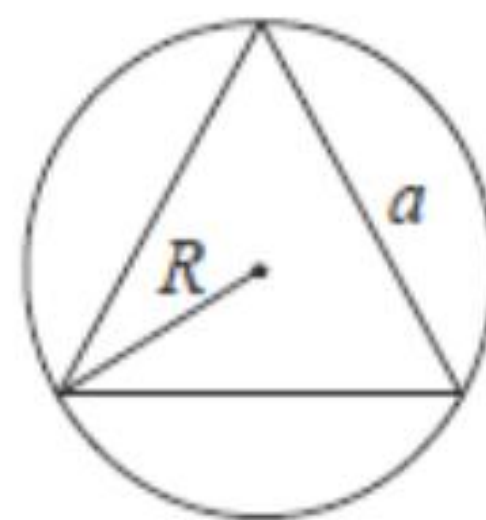
$$R = 5\sqrt{3} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{1} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$a\cancel{\sqrt{3}} = 5\cancel{\sqrt{3}} \cdot 6$$

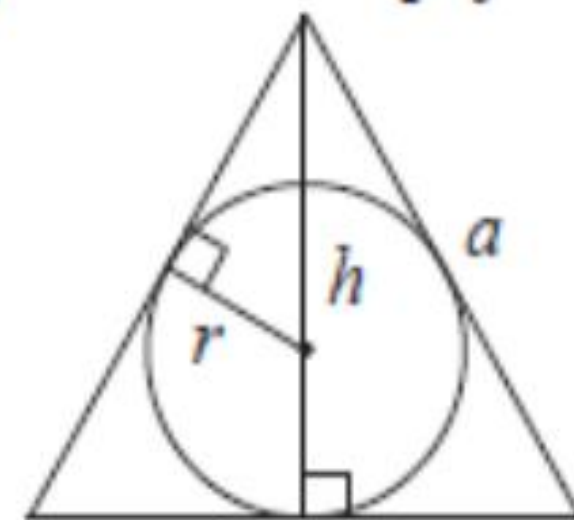
$$a = 5 \cdot 6 = 30$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



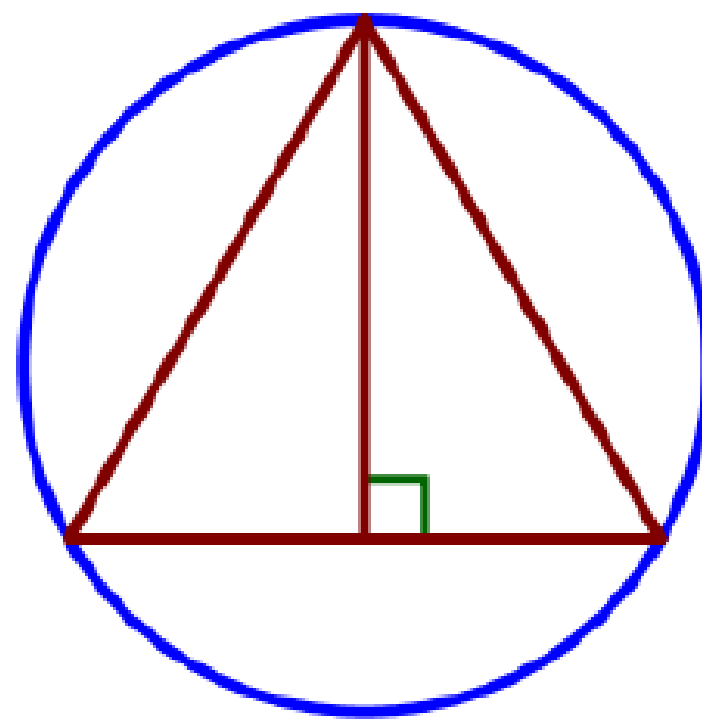
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



19. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 4. Найдите высоту этого треугольника.

$$R = 4$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$a\sqrt{3} = 4 \cdot 3$$

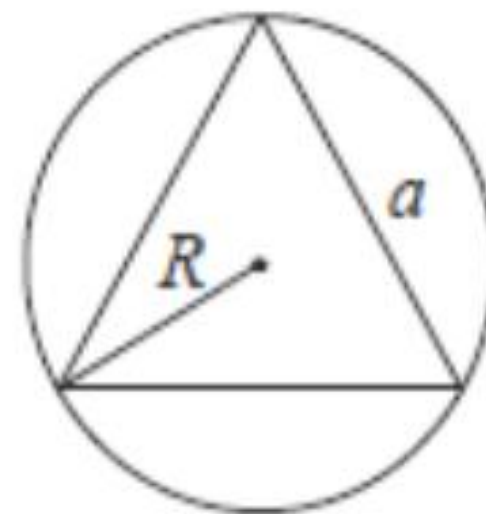
$$a = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2}$$

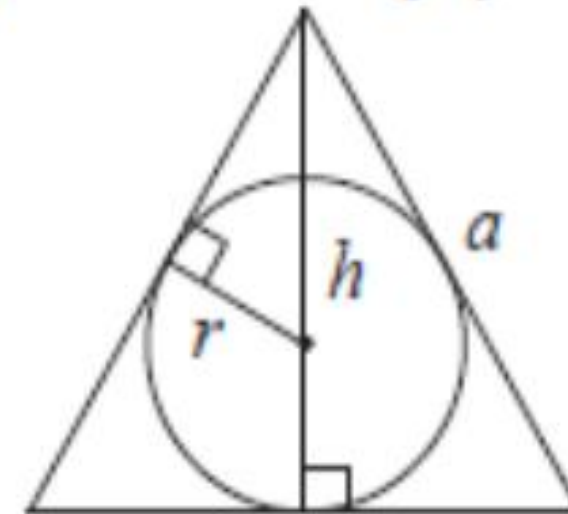
$$h = 6$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



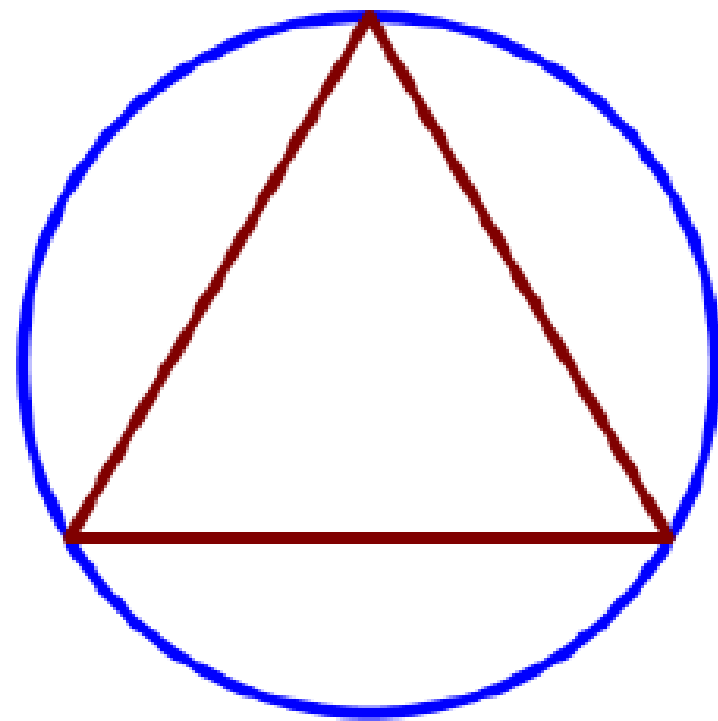
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



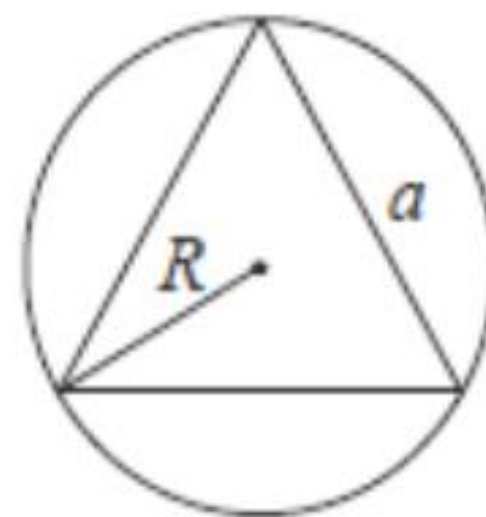
20. Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} =$$

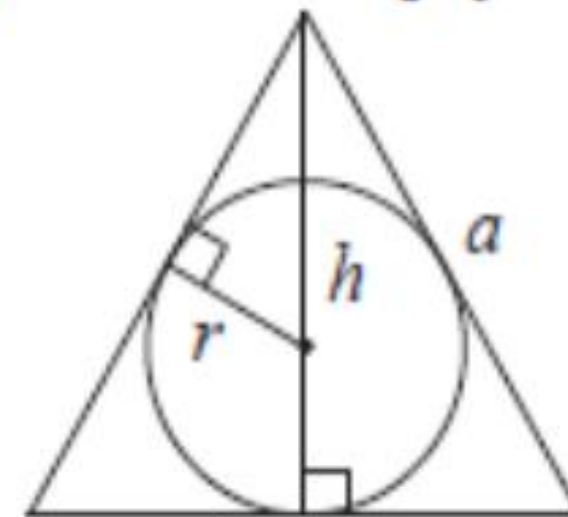
$$= \frac{4(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



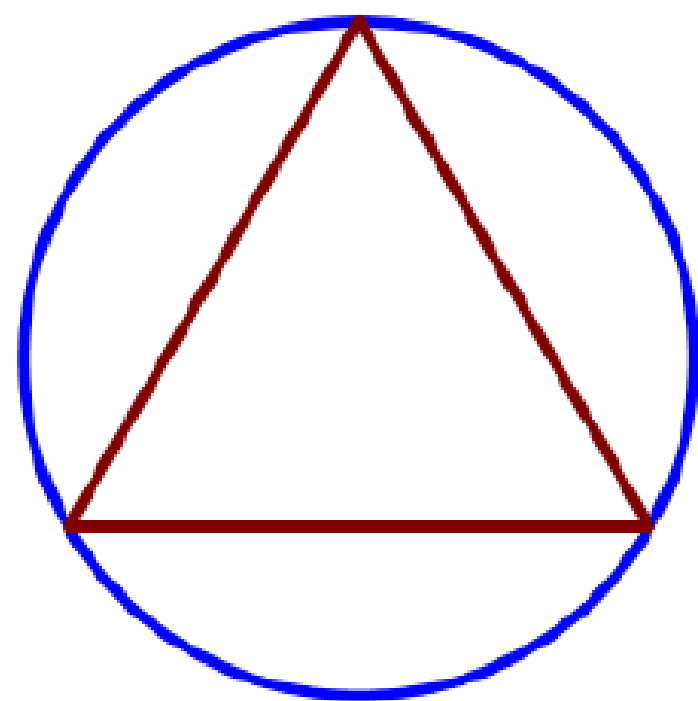
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



21. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $3\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

$$R = 3\sqrt{3}$$

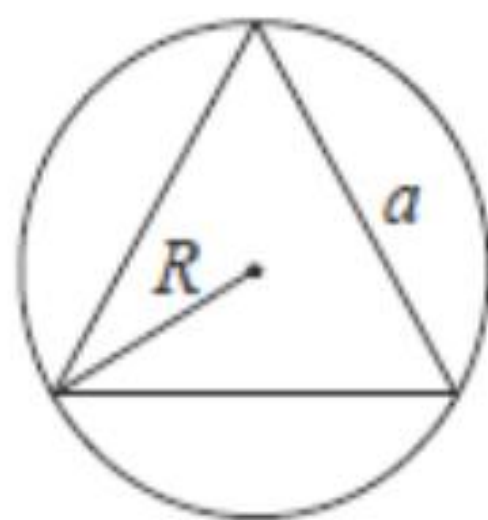
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{a}{3}$$

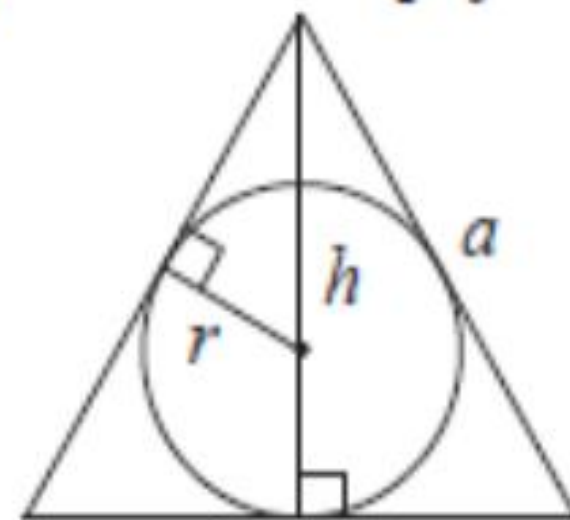
$$a = 9$$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

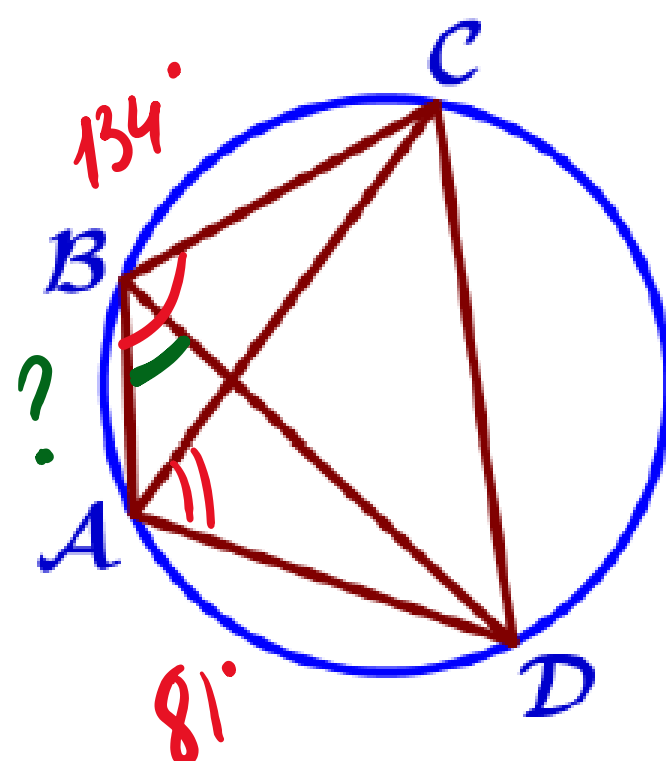
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

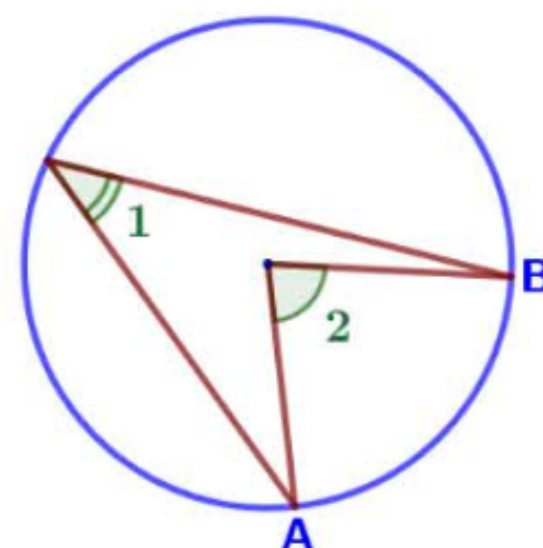
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

IV) Описанная окружность



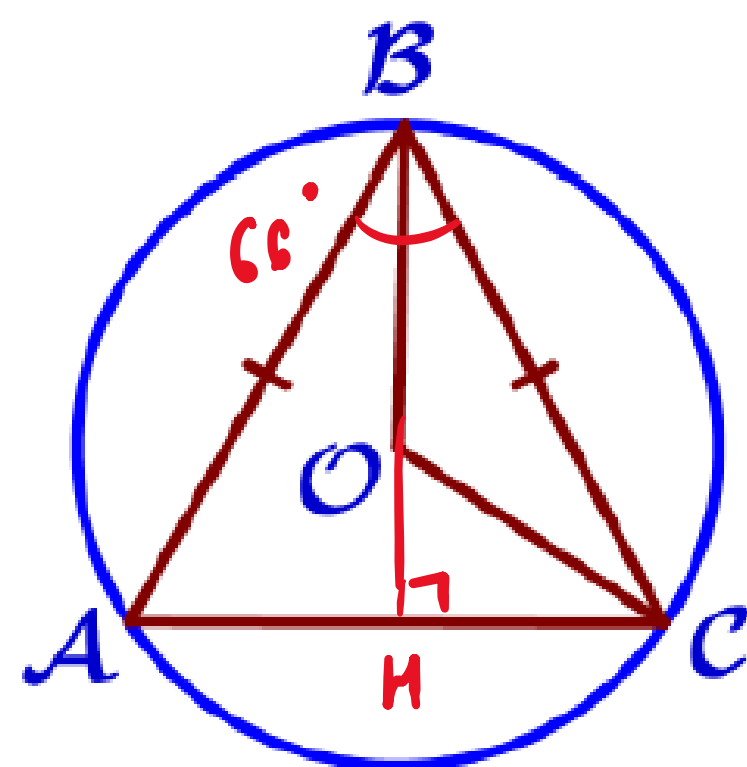
22. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 134° , угол CAD равен 81° . Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

$$\begin{aligned}\angle DAC &= \angle DBC = 81^\circ \text{ (вписанные)} \\ \angle ABD &= \angle ABC - \angle DBC = 134^\circ - 81^\circ = 53^\circ\end{aligned}$$



Градусная мера **вписанного угла** (вершина лежит на окружности) измеряется **половиной** дуги, на которую он опирается: $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$.

Градусная мера **центрального угла** (вершина в центре окружности) равна градусной мере соответствующей дуги окружности: $\angle 2 = \cup AB$.



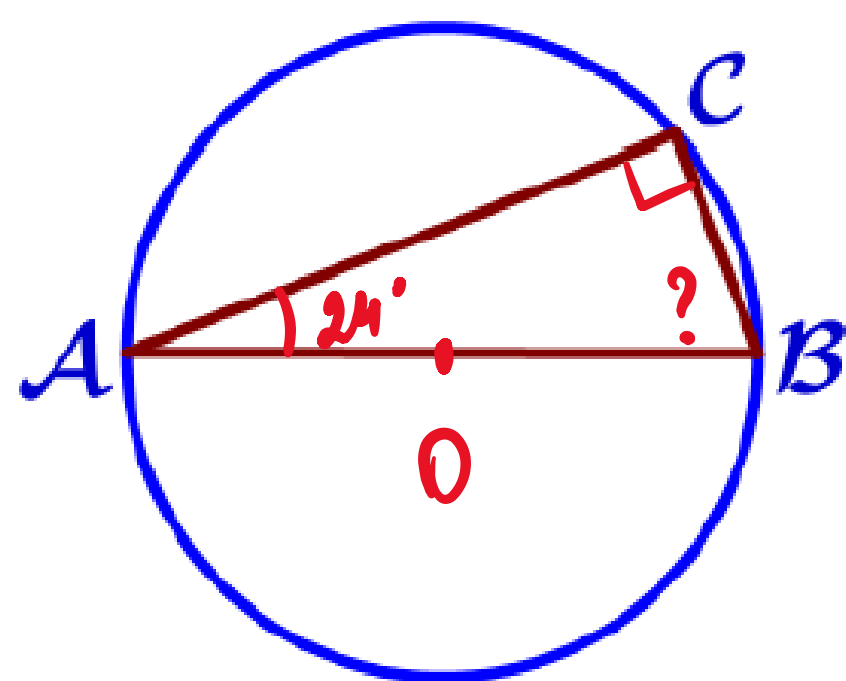
23. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=66^\circ$. Найдите величину угла BOC . Ответ дайте в градусах.

$\triangle ABC - \text{р/б} \Rightarrow BN - \text{биссектриса}$

$$\angle OBC = 66^\circ : 2 = 33^\circ$$

$\triangle OBC - \text{р/б} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 33^\circ$

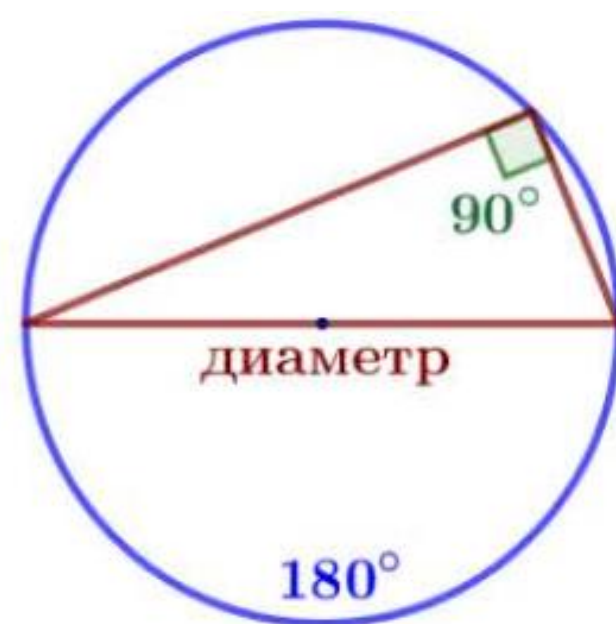
$$\angle BOC = 180 - 2 \cdot 33 = 114^\circ$$



24. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 24° . Ответ дайте в градусах.

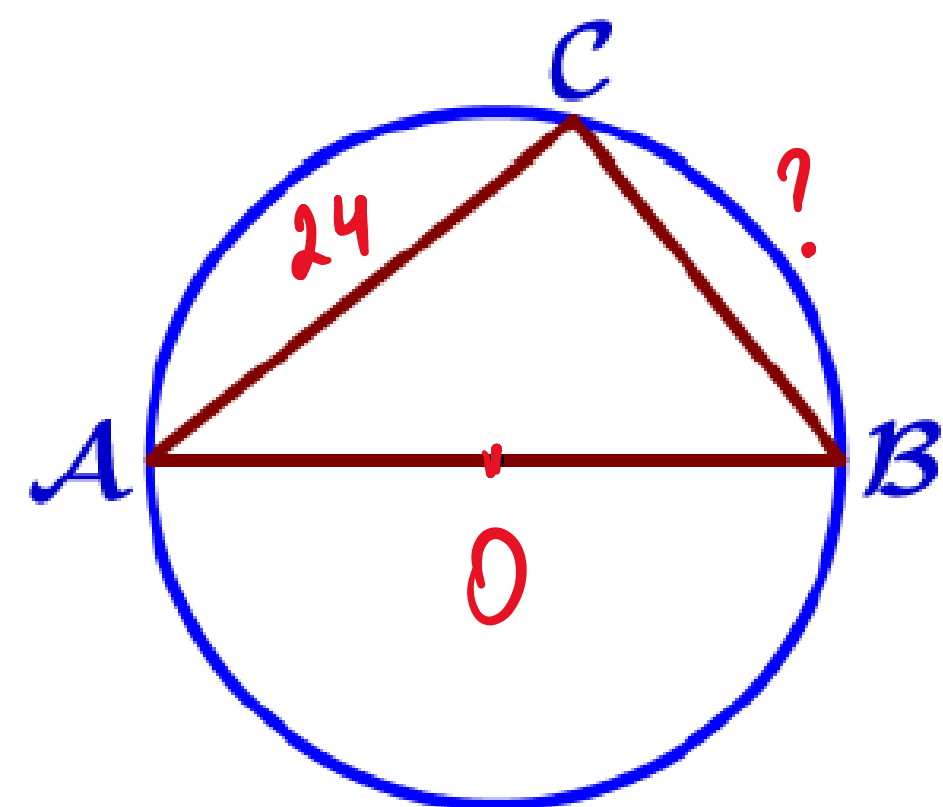
$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$\angle ABC = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$



Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – **прямой** (90°).

Задание 16. Окружность



25. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 15. Найдите BC, если $AC = 24$.

$$AO = OB = R = 15$$

$$AB = 2 \cdot 15 = 30$$

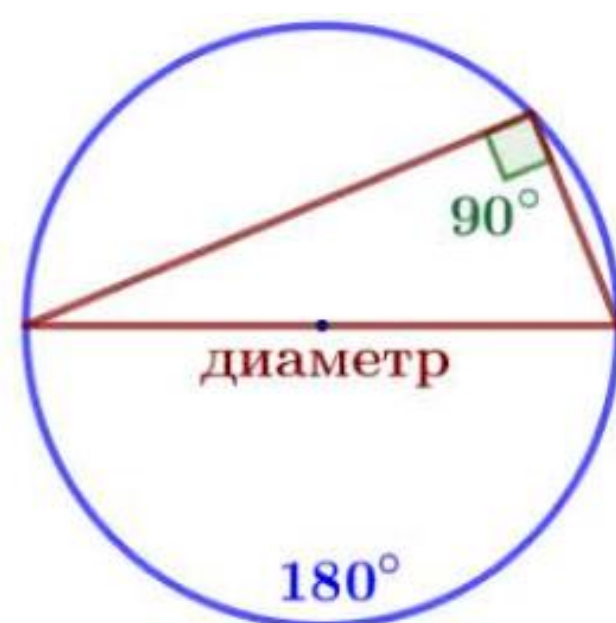
по т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

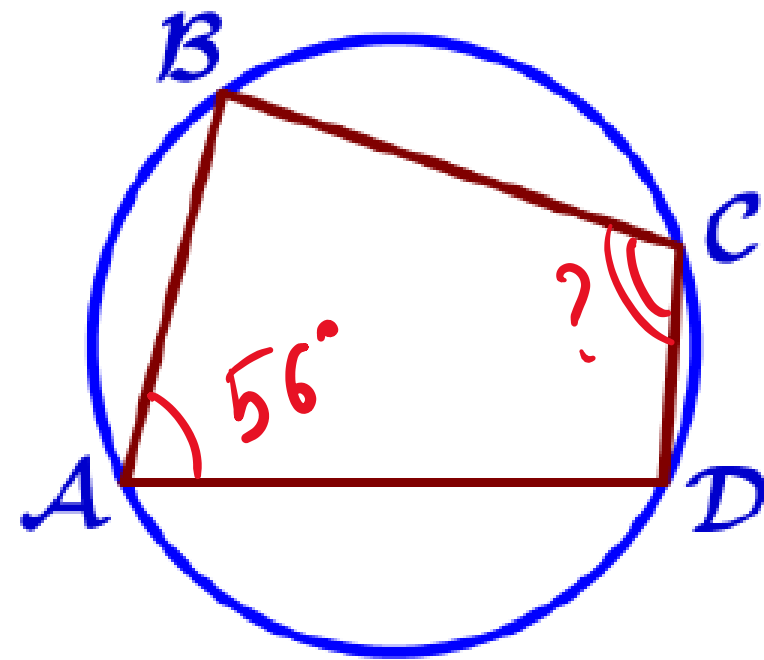
$$24^2 + CB^2 = 30^2$$

$$CB^2 = 30^2 - 24^2 = (30 - 24)(30 + 24) = 6 \cdot 54$$

$$CB = \sqrt{324} = 18$$



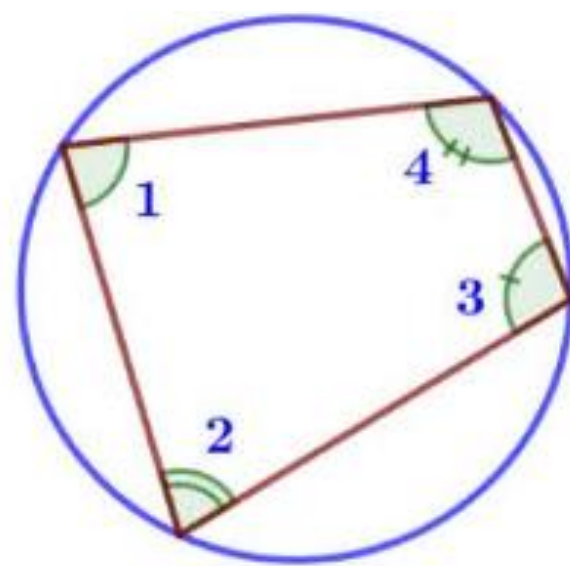
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – **прямой** (90°).



26. Угол A четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, равен 56° . Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

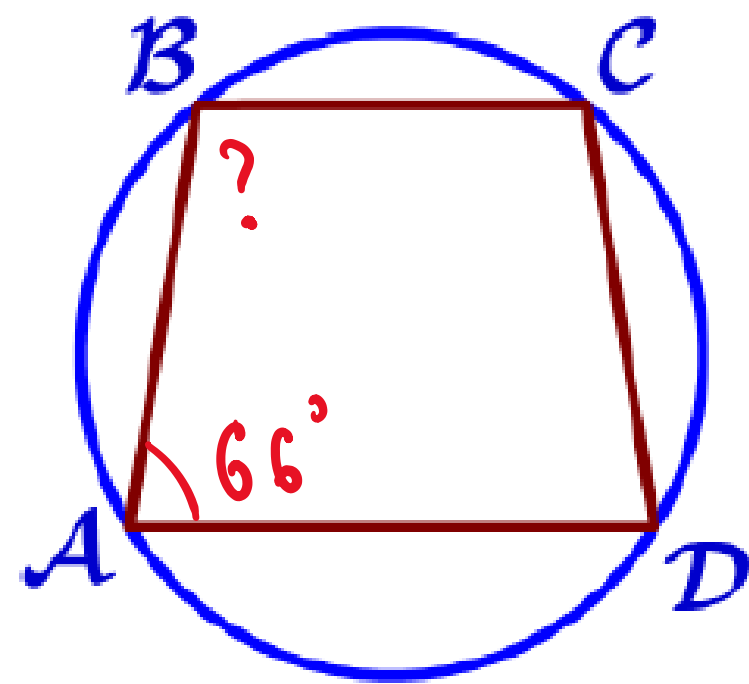
$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$$



В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° :

$$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$$

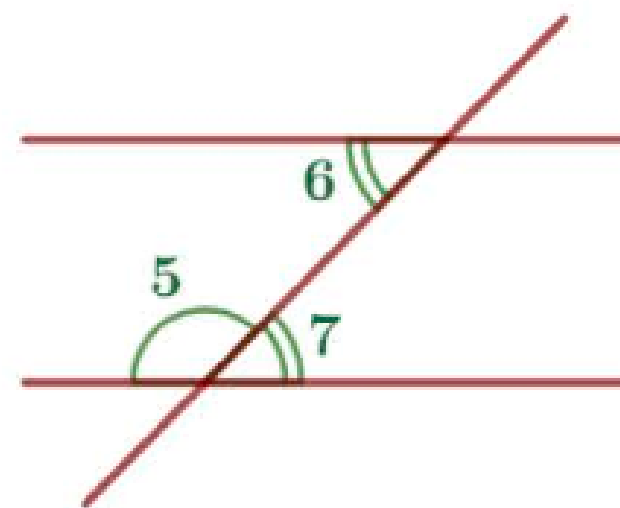


27. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 66° . Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

ABCD-трапеция $\Rightarrow BC \parallel AD$

$$\angle B + \angle A = 180^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$$

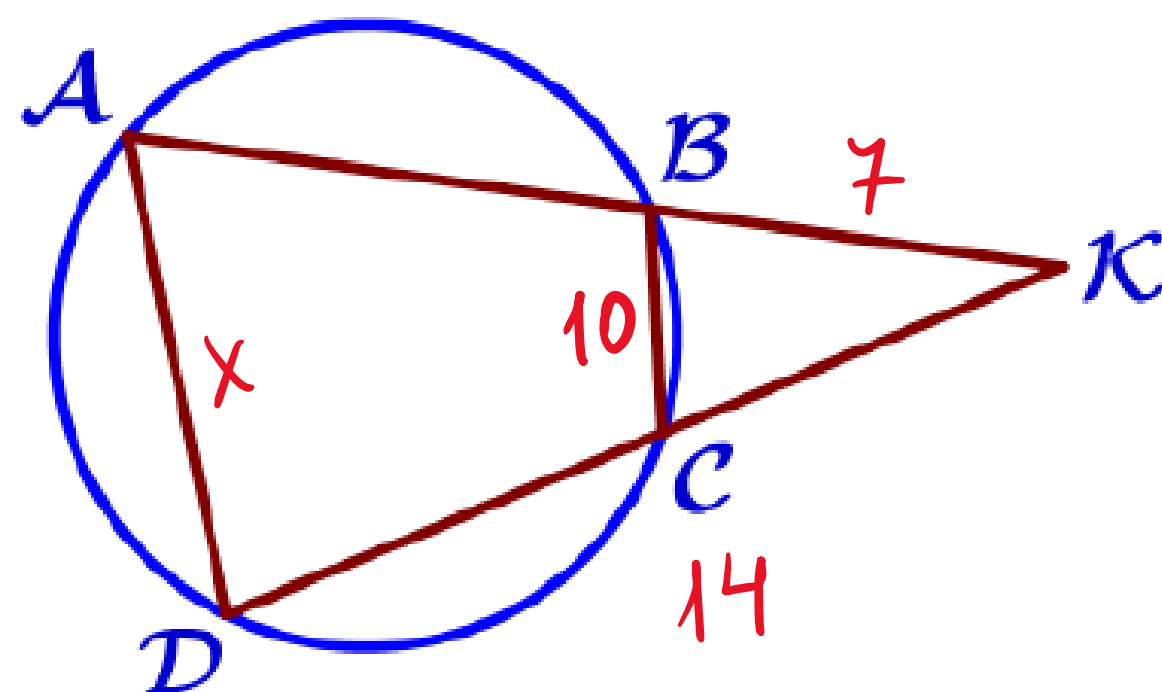


Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

а) сумма односторонних углов равна 180° :

$$\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ;$$

б) накрест лежащие углы равны: $\angle 6 = \angle 7$.



28. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, BK = 7, DK = 14, BC = 10. Найдите AD.

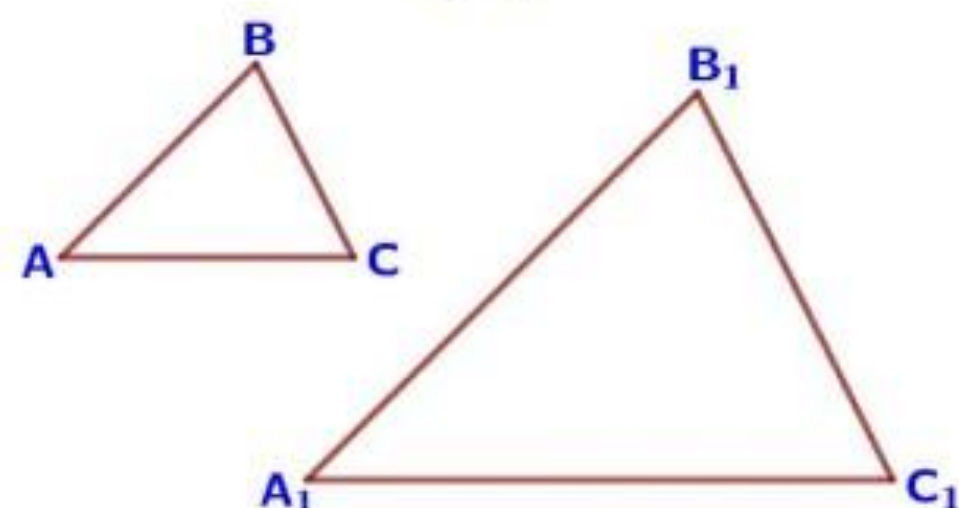
$\triangle BKC \sim \triangle DKC$ (по 2-м углам):

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{DK} = \frac{CK}{AK}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{7}{14}$$

$$x = \frac{14 \cdot 10}{7} = 20$$

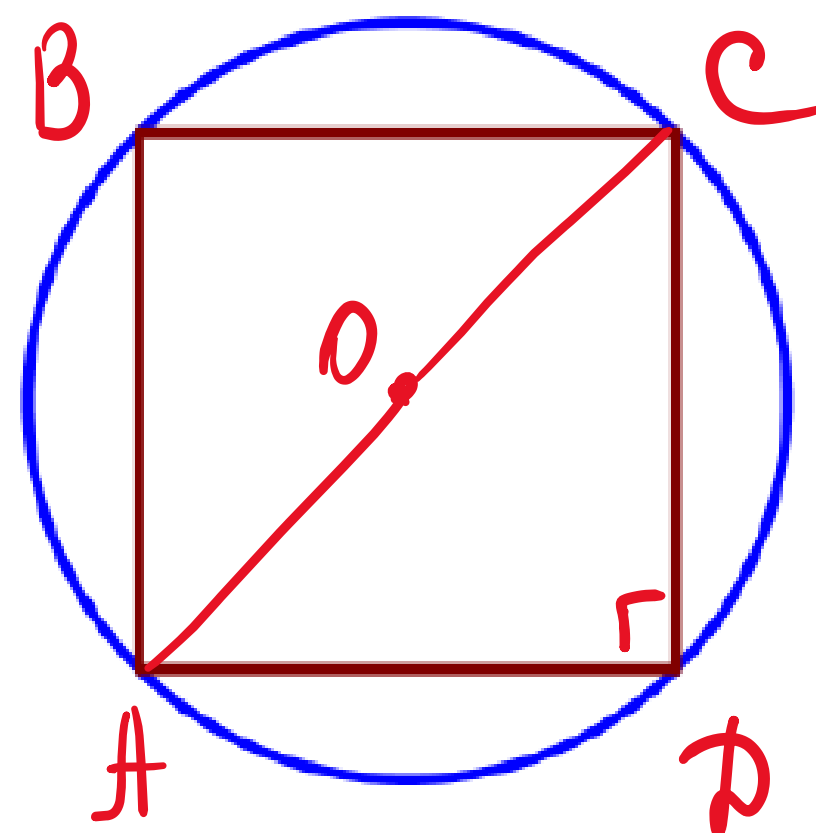
Подобные треугольники



Углы подобных треугольников соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого:

$$\angle A = \angle A_1 \quad \angle B = \angle B_1 \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$



29. Сторона квадрата равна $8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

$$AD = DC = 8\sqrt{2}$$

$$AO = OC = R \Rightarrow AC = 2R$$

По т. Пифагора:

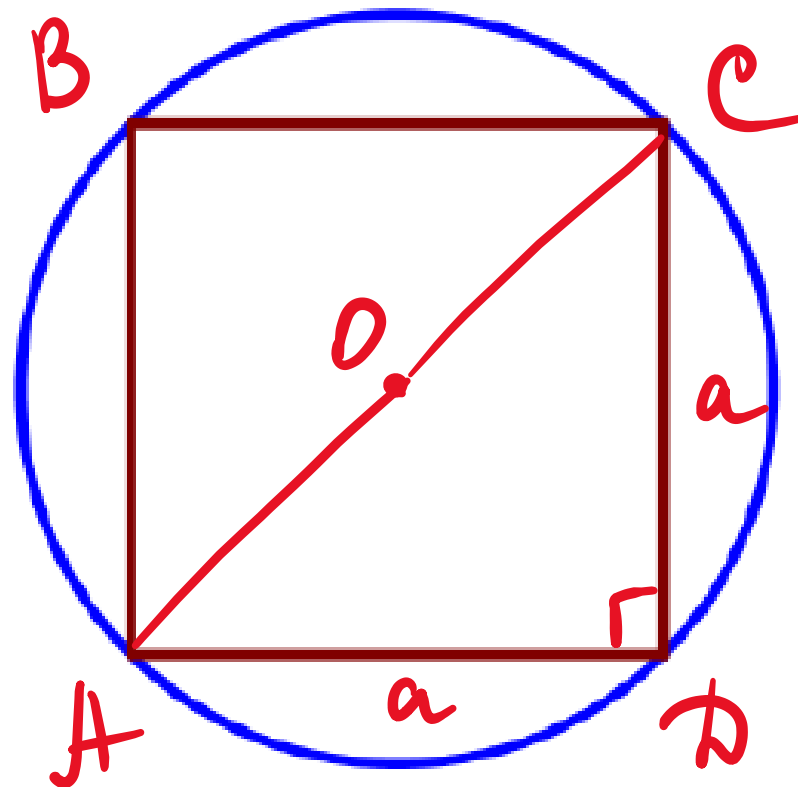
$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(2R)^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2$$

$$4R^2 = 8^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 2$$

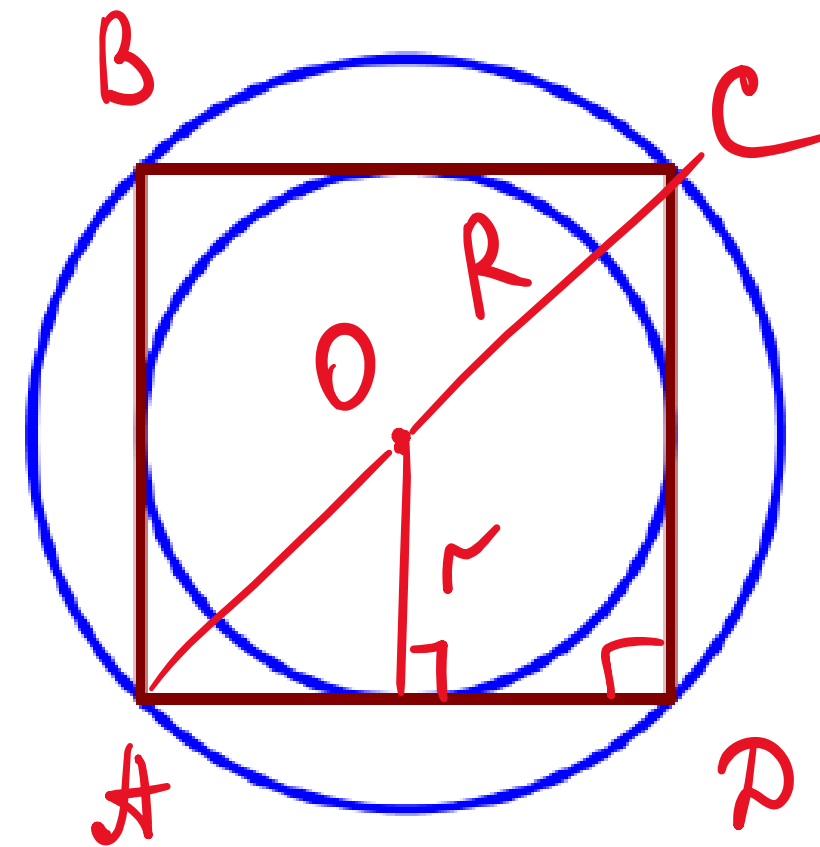
$$4R^2 = 8^2 \cdot 4$$

$$R^2 = 8^2 \Rightarrow R = 8$$



30. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $22\sqrt{2}$. Найдите длину стороны этого квадрата.

$$\begin{aligned} AO &= OC = R = 22\sqrt{2} \\ AC &= 2R = 44\sqrt{2} \\ \text{По т. Пифагора:} \\ AC^2 &= AD^2 + DC^2 \\ (44\sqrt{2})^2 &= a^2 + a^2 \\ 44^2 \cdot 2 &= 2a^2 \\ a^2 &= 44^2 \\ a &= 44 \end{aligned}$$



31. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $7\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

$$r = 7\sqrt{2} \Rightarrow CD = AD = 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

По т. Пифагора:

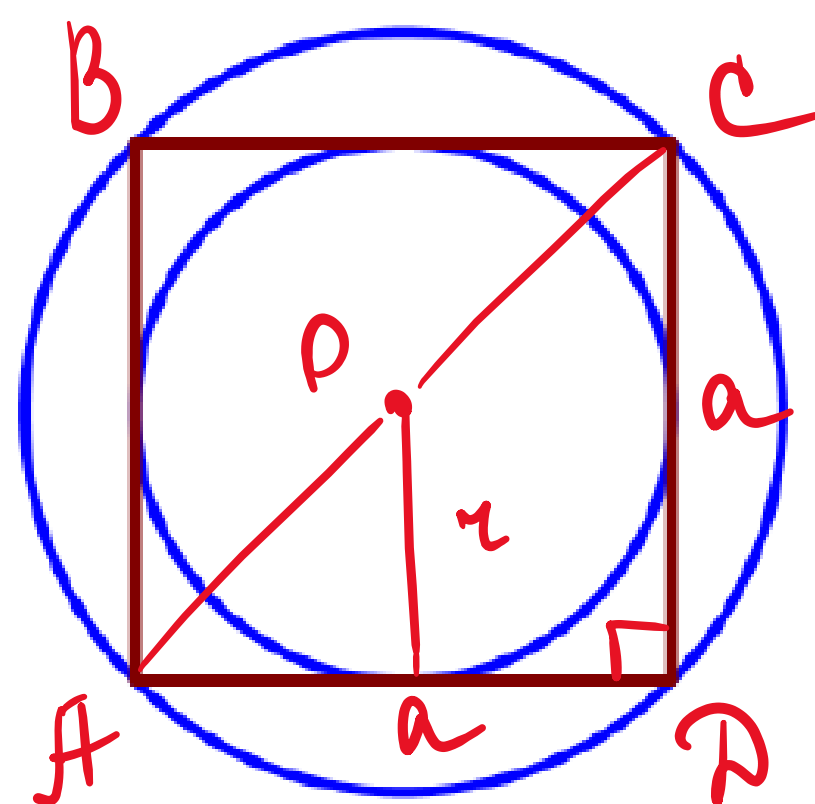
$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(2R)^2 = (14\sqrt{2})^2 + (14\sqrt{2})^2$$

$$4R^2 = 14^2 \cdot 4$$

$$R^2 = 14^2$$

$$R = 14$$



32. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $6\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

$$AO = OC = R = 6\sqrt{2}$$

$$AC = 2R = 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

По т. Пифагора:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(12\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2$$

$$12^2 \cdot 2 = 2a^2$$

$$a^2 = 12$$

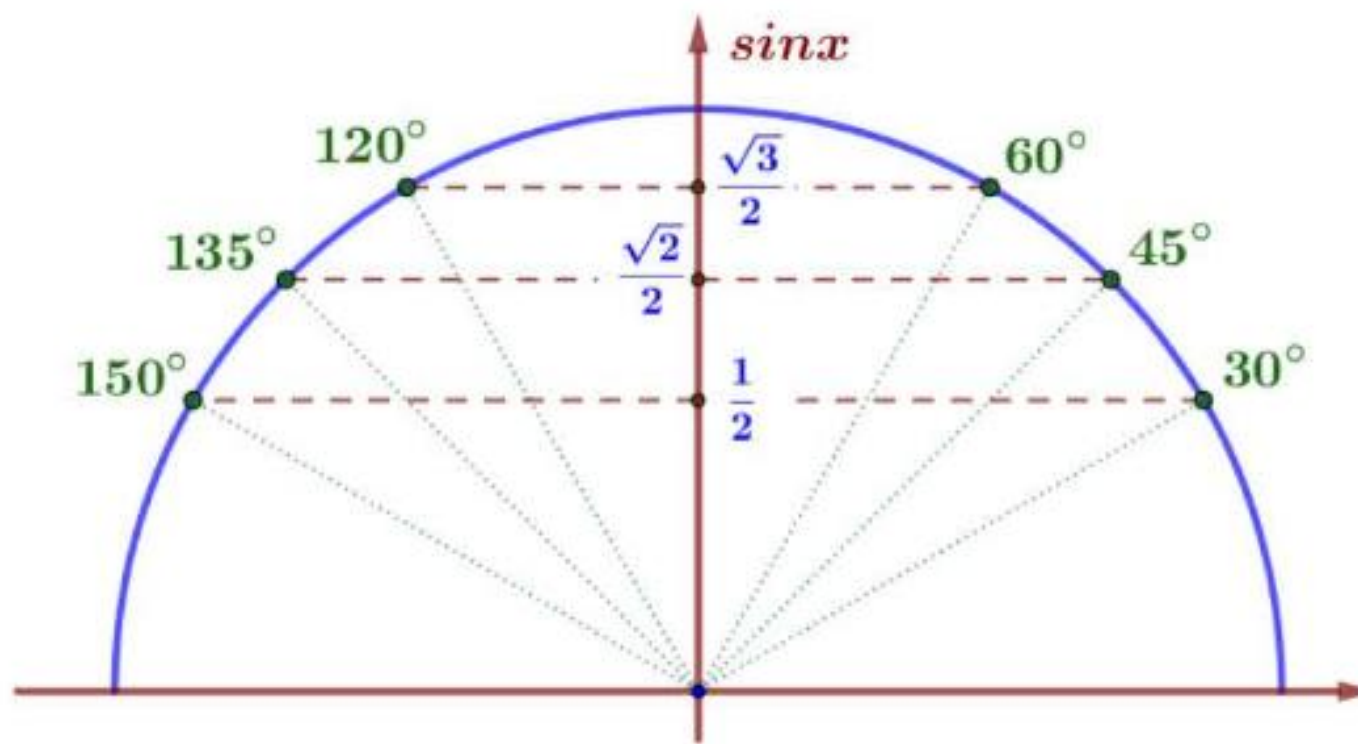
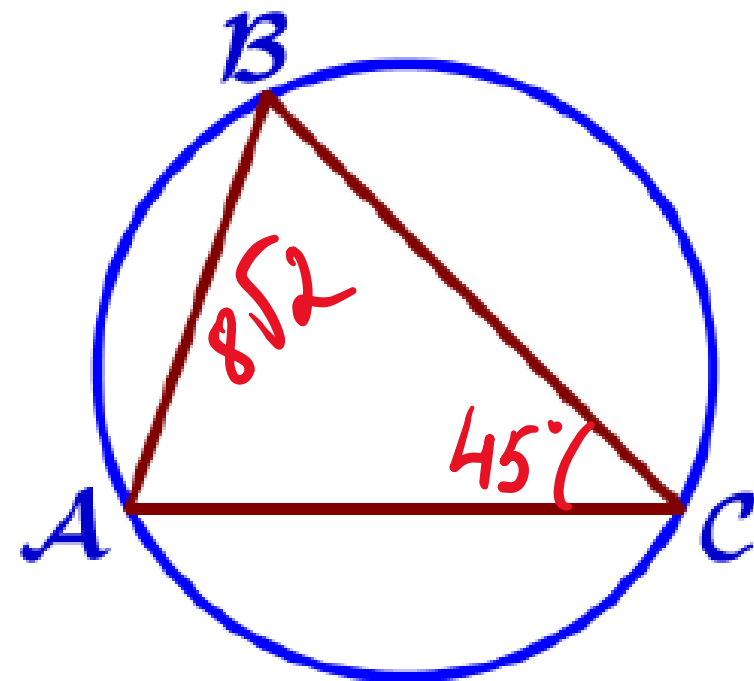
$$a = 12$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$r = \frac{12}{2} = 6$$

V) Расширенная теорема синусов

33. В треугольнике ABC угол C равен 45° , $AB = 8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



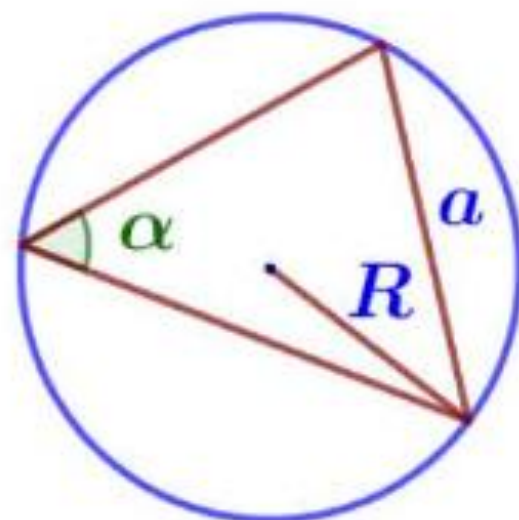
$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

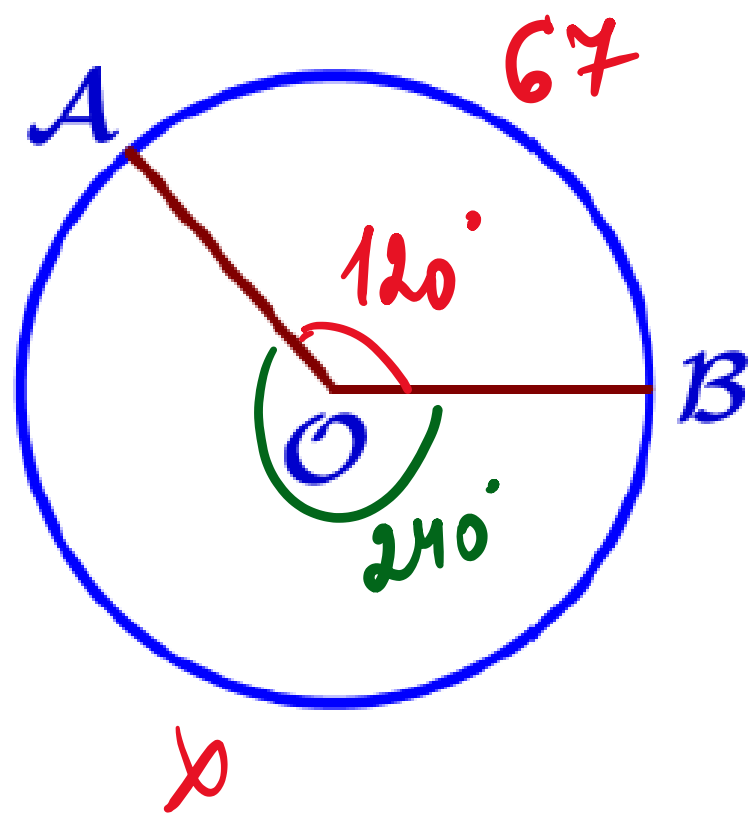
$$\frac{8\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2R \Rightarrow R = 8$$

Удвоенный радиус описанной окружности равен отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$



VI) Длина окружности и площадь круга



34. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 120^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 67 . Найдите длину большей дуги.

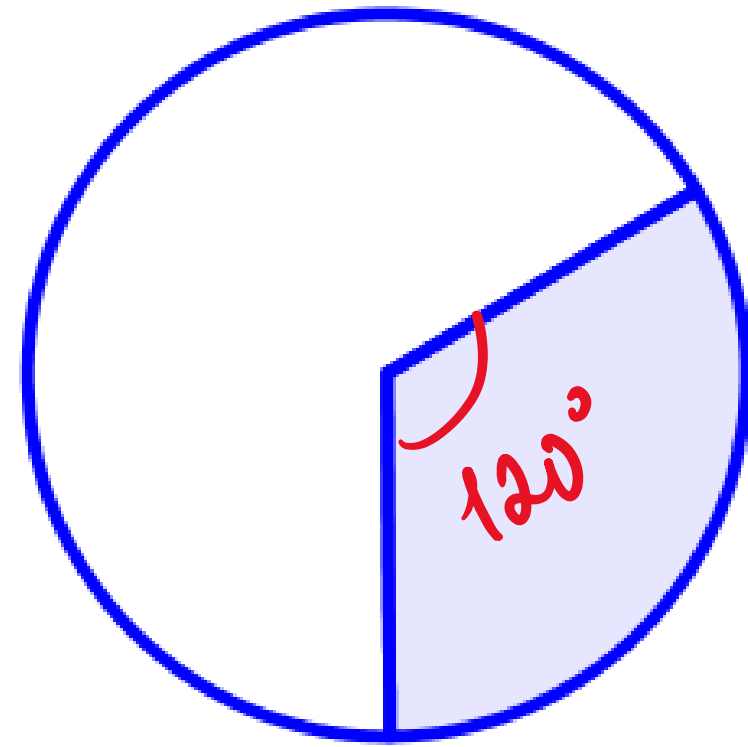
$$\angle AOB = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\begin{array}{r} 67 - 120^\circ \\ x - 240^\circ \end{array}$$

$$\frac{67}{x} = \frac{120^\circ}{240^\circ}$$

$$x = \frac{67 \cdot 240^\circ}{120^\circ} = 67 \cdot 2 = 134$$



35. Площадь круга равна 123. Найдите площадь сектора этого круга, центральный угол которого равен 120° .

$$120^\circ - x$$

$$360 - 123$$

$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{123}$$

$$x = \frac{120^\circ \cdot 123}{360^\circ} = \frac{123}{3} = 41$$